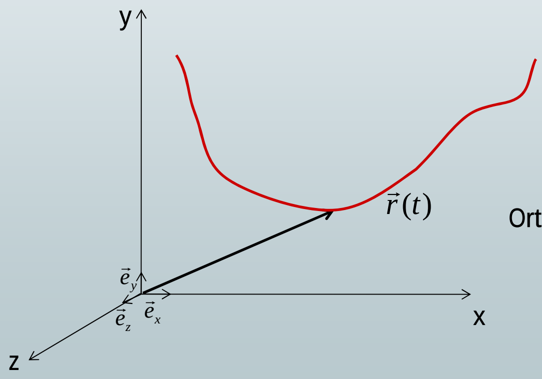
1.0 Intention

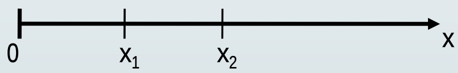
Ort, Geschwindigkeit und Beschleunigung eines Körpers
zu jedem Zeitpunkt beschreiben.



Ortsvektor: $\vec{r}(t)$

1.1 Eindimensionale, geradlinige Bewegung

Eindimensionales Koordinatensystem:



> Versuch:
> Rotierende Dose mit
> Markierungspunkt

> Versuch:
> Ball vor Tafel hochwerfen
> - Im Stehen
> - Im Gehen

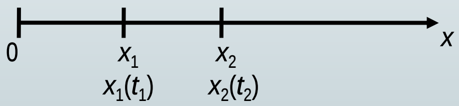
Vereinfachend erfolgt zunächst die Betrachtung:

- von Massenpunkten (ausgedehnte Körper später)
- in Inertialsystemen (erst später auch ein rotierendes Bezugssystem)

1.1.1 Durchschnittsgeschwindigkeit / mittlere Geschwindigkeit

- Versuch: Eisenbahn
  - Positionsmarken setzen
  - Metronom für Zeittakt

Geschwindigkeitsmessung:



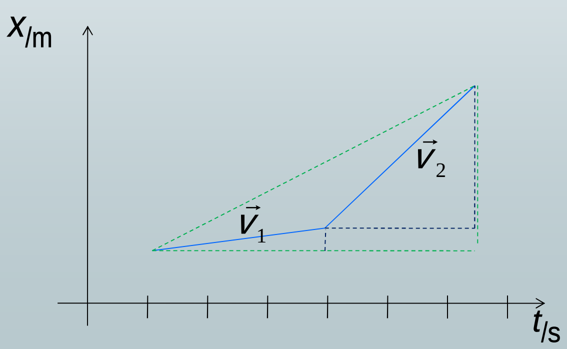
$$v := \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{x_2 - x_1}{t_2 - t_1} = \frac{x(t_2) - x(t_1)}{t_2 - t_1}$$

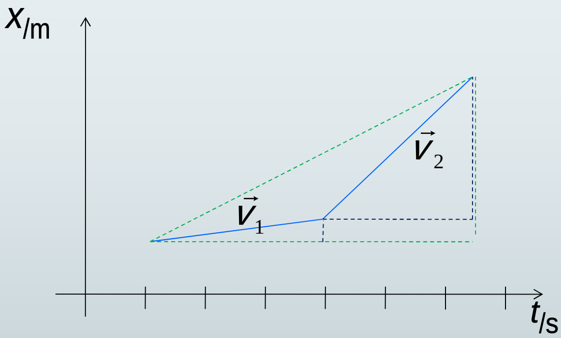
Mittlere Geschwindigkeit = $\frac{\text{Wegstrecke}}{\text{Zeitintervall}}$

Daten aus dem Experiment in eine Wertetabelle aufnehmen:

x/m						
t/s						

Grafische Darstellung im Zeit-Weg-Diagramm – *x*(t)-Diagramm





$v_1 =$

$v_2 =$

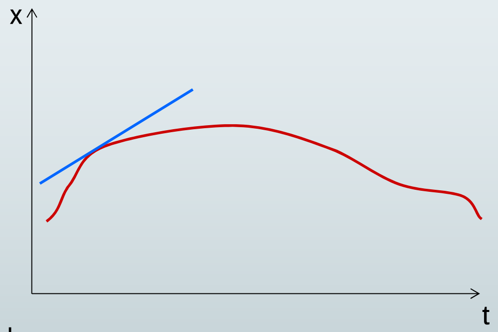
$v_{Ges} =$

Die Geschwindigkeit ist an der Steigung des Graphen im *x*(*t*)-Diagramm ablesbar.

Weitere Möglichkeiten die Bewegungsabläufe zu registrieren

- Stroboskopaufnahme
- Film
- Markierungsstreifen

1.1.2 Die Momentangeschwindigkeit



Rechnerisch:

$$v = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}$$

Graphisch:

Die Momentangeschwindigkeit zu einem bestimmten Zeitpunkt zeigt sich als die Steigung der Tangente an der *x*(*t*)-Kurve zu diesem Zeitpunkt.

Exkurs: Ableitung einer Potenzfunktion

$$x(t) = c \cdot t^n$$

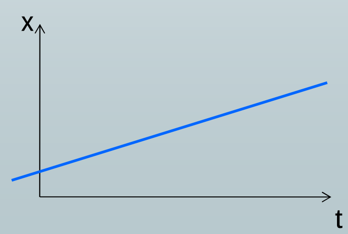
$$\dot{x} = \frac{d\ x(t)}{dt}$$

$$= \frac{d}{dt}\left(c \cdot t^n\right) = c \cdot \frac{d}{dt}\left(t^n\right) = c \cdot n \cdot t^{n-1}$$

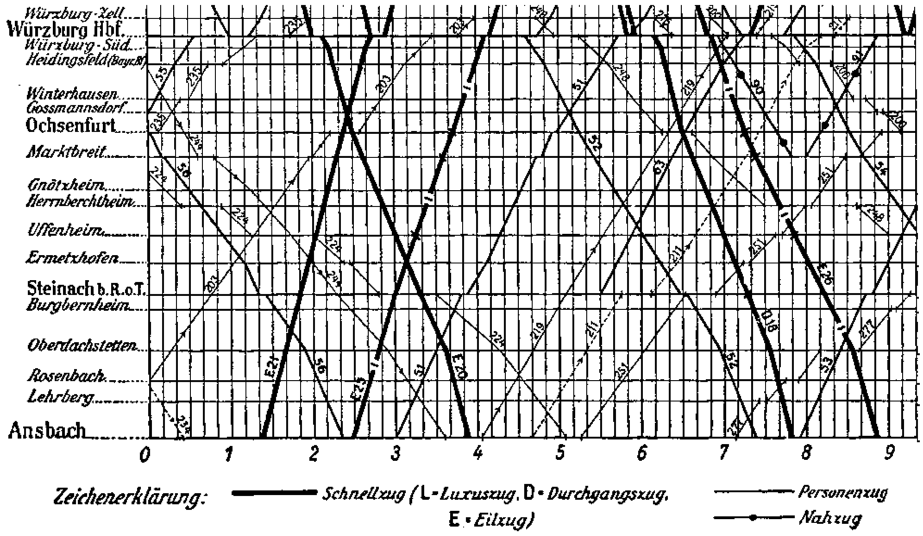
Beispiel:

$$x(t) = b \cdot t^n + c$$

$$v = \dot{x} = b$$

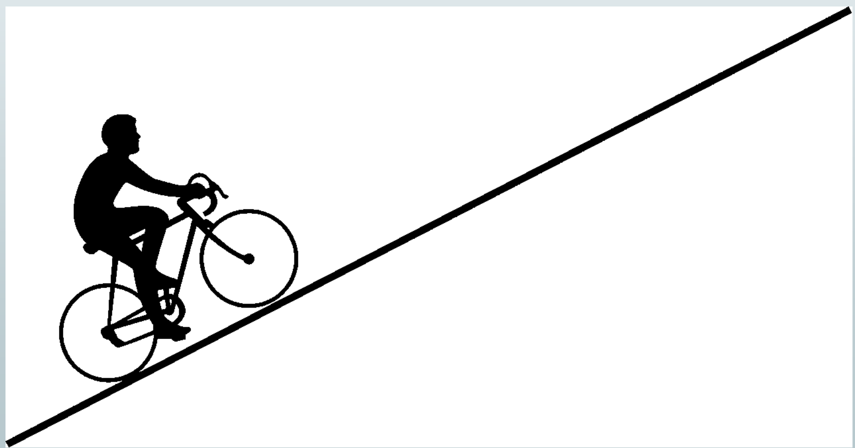


WÜRZBURG - ANSBACH



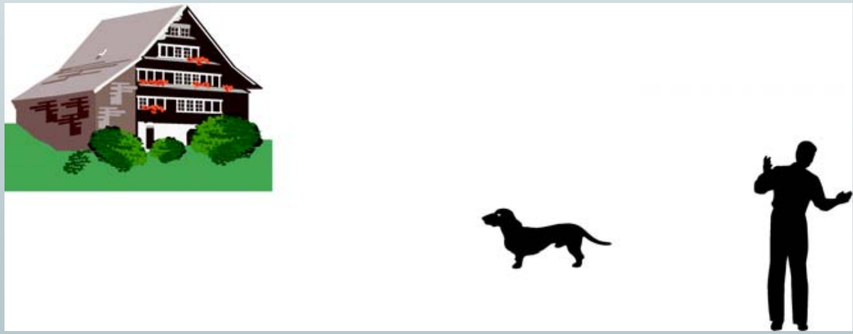
Aufgabe: Durchschnittsgeschwindigkeit

Ein Radfahrer fährt mit einer Geschwindigkeit von 15 km h^{-1} den Berg hinauf. Wie schnell muss er dieselbe Strecke zurückfahren, um insgesamt die doppelte Durchschnittsgeschwindigkeit, also 30 km h^{-1}, zu erreichen?



Aufgabe: Waldi

Förster Knalle und sein Dackel Waldi gehen nach der Pirsch zurück zum Forsthaus. 100 m vor dem Haus führt der Weg aus dem Wald heraus auf eine freie Wiese. Waldi, der das Haus sieht, rennt vor bis zur Tür, dann jedoch, von Pflichtgefühl getrieben, zurück zu seinem Herrchen, wieder zur Tür und zurück usw., bis der Förster die Tür erreicht.
Wie weit ist Waldi insgesamt gelaufen, wenn er viermal so schnell läuft wie der Förster geht?



Aufgabe: Flussreise

Ein Lastkahn fährt zwischen zwei Flusshäfen die 100 km auseinander liegen hin und her. Er benötigt flussaufwärts 10 Stunden, flussabwärts nur 4 Stunden.
Berechnen Sie die Strömungsgeschwindigkeit des Flusses und die Eigengeschwindigkeit des Bootes.

Aufgabe: Flussreise

Ein Lastkahn fährt zwischen zwei Flusshäfen die 100 km auseinander liegen hin und her. Er benötigt flussaufwärts 10 Stunden, flussabwärts nur 4 Stunden. Berechnen Sie die Strömungsgeschwindigkeit des Flusses und die Eigengeschwindigkeit des Bootes.

$L = 100\,km\ ;\ \Delta t_1 = 4\,h\ ;\ \Delta t_2 = 10\,h$

$$v_1 = v_{Boot} + v_{Fluß} = \frac{L}{\Delta t_1}$$

$$v_2 = v_{Boot} + v_{Fluß} = \frac{L}{\Delta t_2}$$

$$\Rightarrow 2v_B = \frac{L}{\Delta t_1} + \frac{L}{\Delta t_2} = \frac{L}{2}\,\frac{\Delta t_2 + \Delta t_1}{\Delta t_1 \Delta t_2}$$

$$\underline{\underline{v_B = 17{,}5\ km\ h^{-1}}}$$

$$\underline{\underline{v_F = \frac{L}{2}\,\frac{\Delta t_2 - \Delta t_1}{\Delta t_1\,\Delta t_2} = 7{,}5\ km\ h^{-1}}}$$

<u>1.2.3 Die Beschleunigung</u> (Maß für die zeitliche Änderung der Geschwindigkeit)

Mittlere Beschleunigung: (Geschwindigkeitsänderung / Zeitintervall)

Momentanbeschleunigung:

$$a = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{d}{dt} v(t) = \frac{dv}{dt} = \dot{v} = \ddot{x}$$

Beispiel: $v = \dot{x} = 3ct^2$

$a = \dot{v} = 6ct$

Zusammenhänge zwischen *x*,*v* und *a*

- Schiefe Ebene
- beliebige Bewegung

Wie lässt sich von der Beschleunigung *a* auf die Geschw. *v* schließen?

Bekannt: $$\frac{dv}{dt} = a$$

"Umkehrung" der Differentiation nötig.

Exkurs: Integration einer Potenzfunktion

$$F(x) = \int f(x)dx \;;$$

Stammfunktion

$$F(x) = \int (u \cdot x^n)\,\mathrm{d}x$$

$$= u \cdot \int x^n\,\mathrm{d}x$$

$$= u \cdot \frac{x^{n+1}}{n+1} + c$$

Integrationskonstante "enthält" Anfangsbedingungen

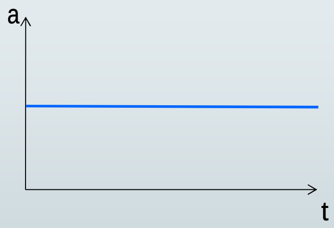
Bewegung mit konstanter Beschleunigung

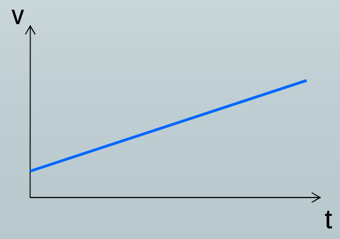
$$a = \text{konst}$$

$$\Delta v = \int_0^t a\,dt^* = a \cdot t$$

$$v - v_0 = a \cdot t$$

$$\boxed{v = a \cdot t + v_0}$$



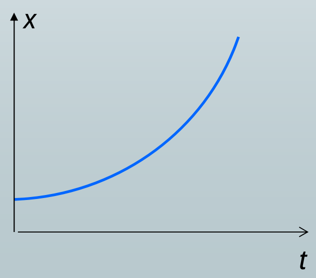


Bewegung mit konstanter Beschleunigung

$$\Delta x = \int_0^t v\,dt^* = \frac{1}{2} a t^2 + v_0 \cdot t$$

$$x - x_0 = \frac{1}{2} a t^2 + v_0 \cdot t$$

$$\boxed{x = \frac{1}{2} a t^2 + v_0 \cdot t + x_0}$$



Fahrbahn

	x_0	$4x_0$	$9x_0$
$x-x_0$	10	40	90
Δt			
$\vec{v}=\frac{\Delta s}{\Delta t}$	v_0	$2v_0$	$3v_0$

Zusammenhang zwischen *v* und *x*

Einfacher Fall: $x_0 = 0$; (d.h. Start vom Ursprung)

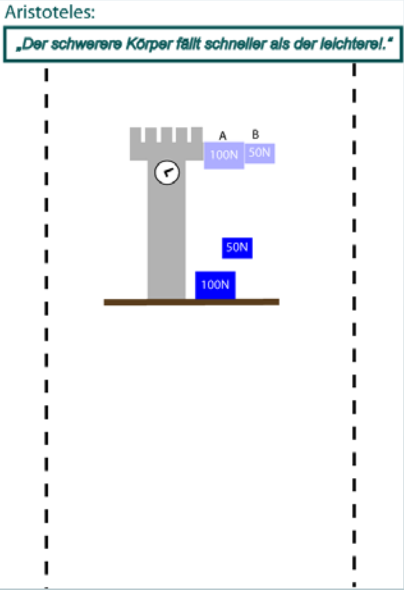
$v_0 = 0$; (d.h. Bewegung aus dem Stand)

$$\left.\begin{array}{l} v = a \cdot t \\ x = \frac{1}{2} a t^2 \end{array}\right\} \quad t = \frac{v}{a}; \quad x = \frac{1}{2} a \frac{v^2}{a^2}$$

$$\boxed{v^2 = 2\,a\,x}$$

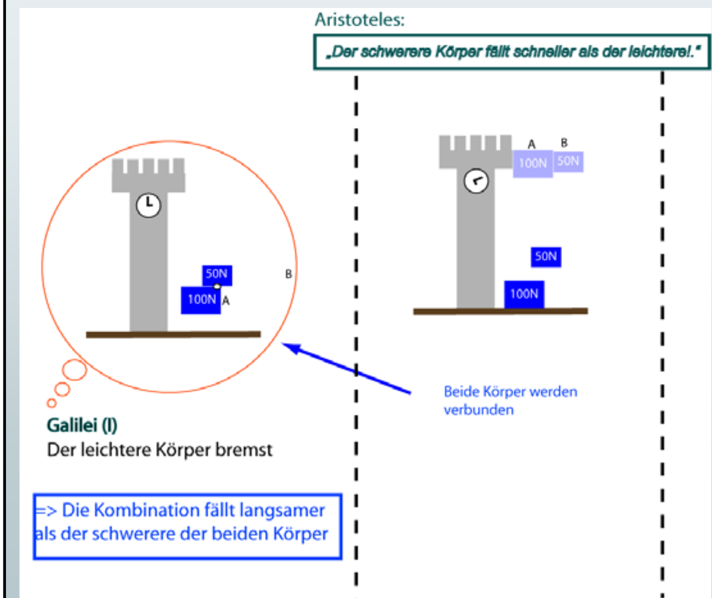
Allgemein: $\boxed{v^2 - v_0^2 = 2ax}$

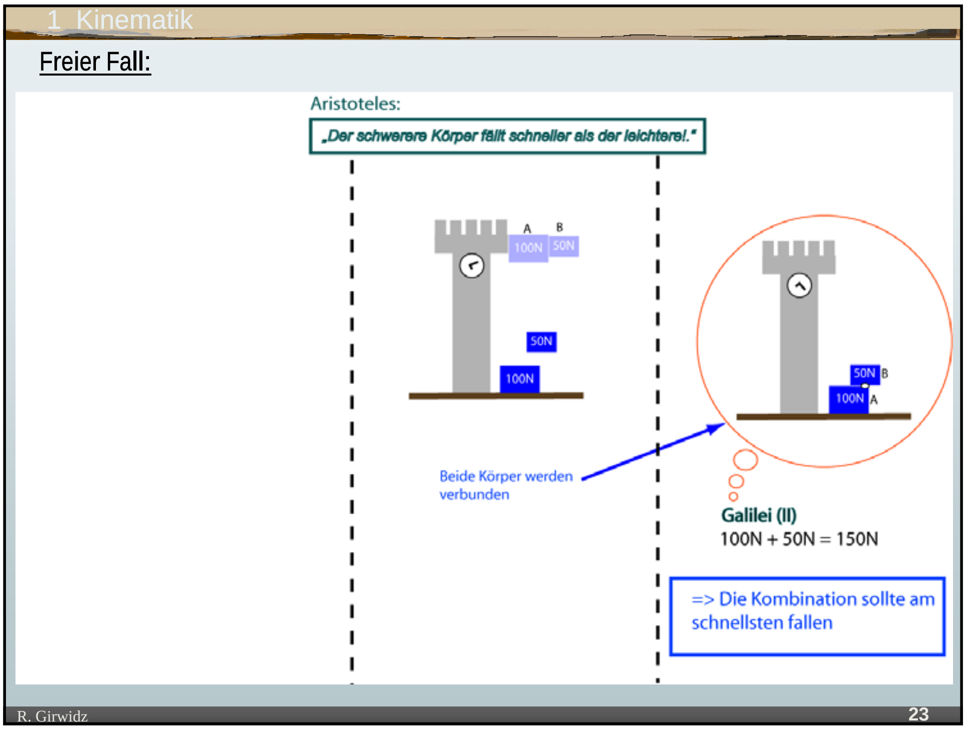
Freier Fall:

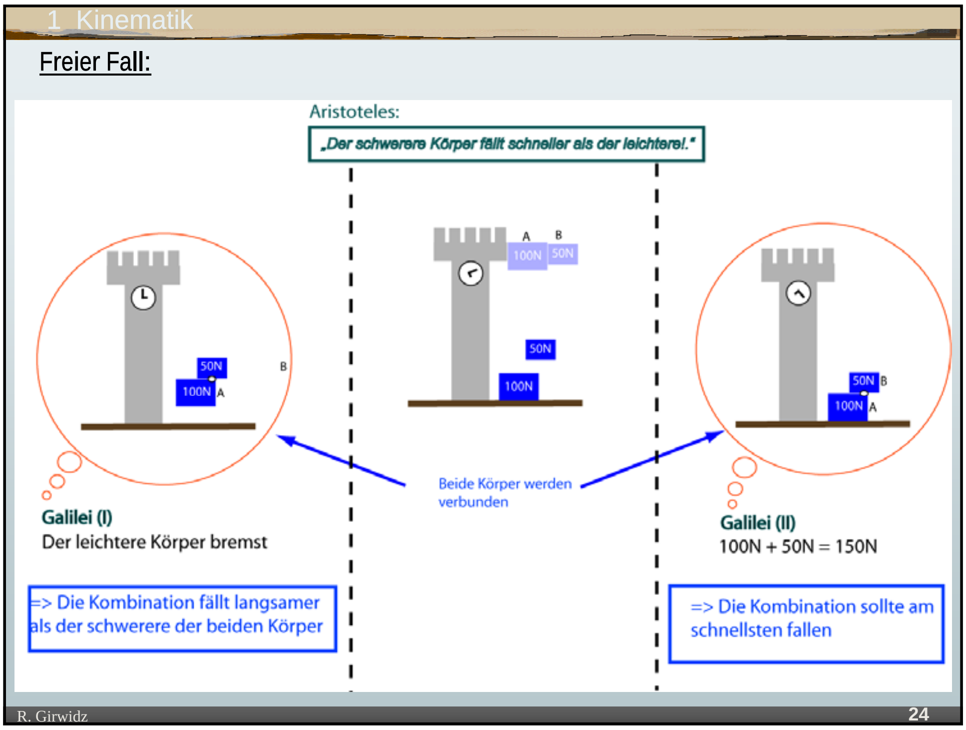


1 Kinematik

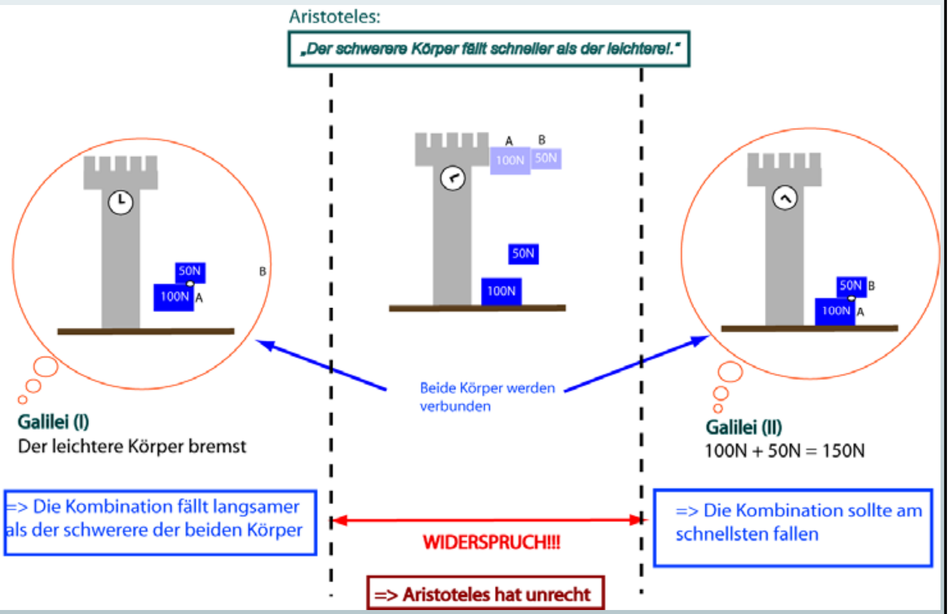
Freier Fall:




1 Kinematik
Freier Fall:
Aristoteles:
„Der schwerere Körper fällt schneller als der leichtere!"
A
B
100N
50N
50N
100N
Beide Körper werden verbunden
50N
B
100N
A
Galilei (II)
100N + 50N = 150N
=> Die Kombination sollte am schnellsten fallen
R. Girwidz
23

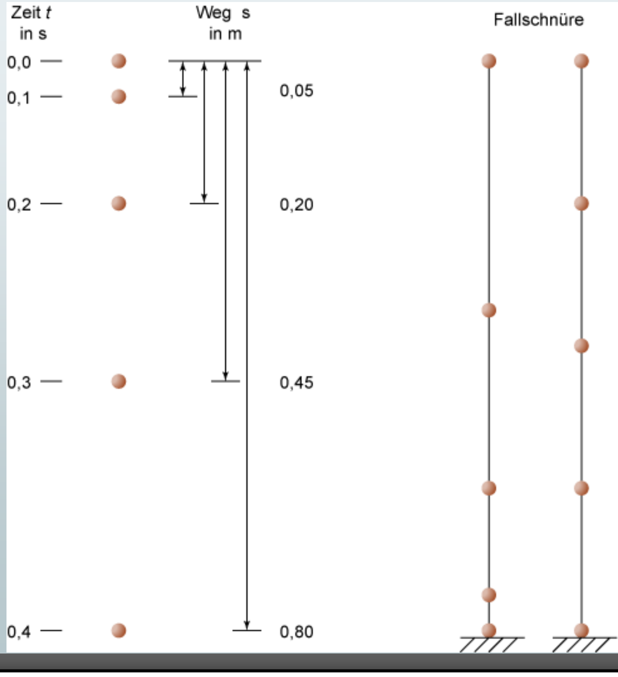

1 Kinematik
Freier Fall:
Aristoteles:
„Der schwerere Körper fällt schneller als der leichtere!"
50N
B
100N
A
Galilei (I)
Der leichtere Körper bremst
=> Die Kombination fällt langsamer als der schwerere der beiden Körper
A
B
100N
50N
50N
100N
Beide Körper werden verbunden
50N
B
100N
A
Galilei (II)
100N + 50N = 150N
=> Die Kombination sollte am schnellsten fallen
R. Girwidz
24

Freier Fall:



Fallbewegung:

Freier Fall:

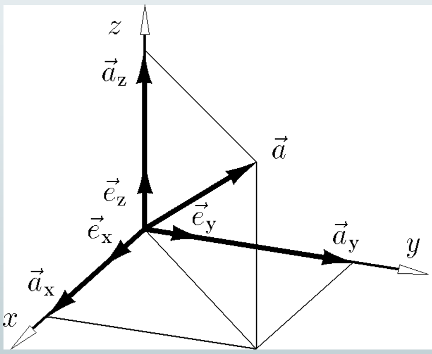


1.2 Bewegung in zwei und drei Dimensionen

1.2.1 Exkurs rechnen mit Vektoren (I)

- Schreibweise

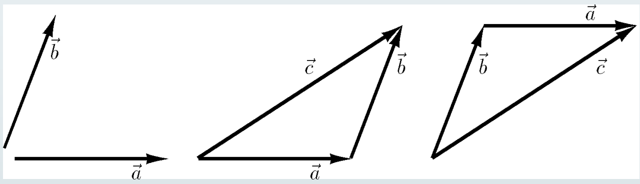
$$\vec{a} = a_x\vec{e}_x + a_y\vec{e}_y + a_z\vec{e}_z = \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{pmatrix};$$



- Betrag / "Länge"

$$|\vec{a}| = \sqrt{\vec{a}\cdot\vec{a}} = \sqrt{a_x{}^2 + a_y{}^2 + a_z{}^2}$$

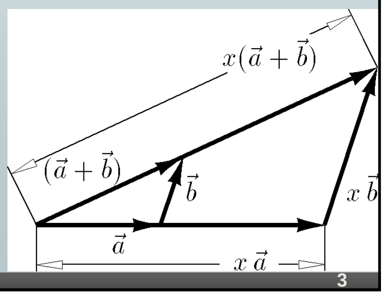
- Addition



$$\vec{c} = \vec{a} + \vec{b} = \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_x \\ b_y \\ b_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_x + b_x \\ a_y + b_y \\ a_z + b_z \end{pmatrix};$$

- Multiplikation mit Skalar

$$\vec{c} = x \cdot \vec{a} = \begin{pmatrix} x \cdot a_x \\ x \cdot a_y \\ x \cdot a_z \end{pmatrix};$$



- ***x, v, a*** sind gerichtete Größen

  => genauer $\vec{x}, \ \vec{v}, \ \vec{a};$

- Beispiel: Senkrechter Wurf nach oben

1.2.2 Kinematik mit Vektoren

$$\vec{v} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \dot{\vec{r}}$$

$$= \frac{d}{dt}\vec{r} = \frac{d}{dt}\begin{pmatrix} r_x \\ r_y \\ r_z \end{pmatrix}$$

$$= \underbrace{\frac{dr_x}{dt}}_{v_x}\vec{e}_x + \frac{dr_y}{dt}\vec{e}_y + \frac{dr_z}{dt}\vec{e}_z$$

Zerlegung in Komponenten - „einfach Komponenten differenzieren“

(! nur im kart. Koordinatensystem !)

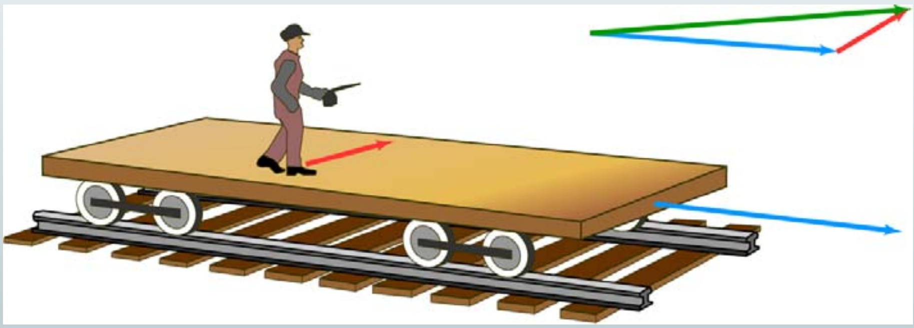
Beschleunigung:

$$\vec{a} = \dot{\vec{v}} = \ddot{\vec{r}}$$

$$= \underbrace{\frac{dr_x}{dt}}_{\vec{a}_x}\vec{e}_x + \frac{dr_y}{dt}\vec{e}_y + \frac{dr_z}{dt}\vec{e}_z$$ (Zerlegung in Komponenten)

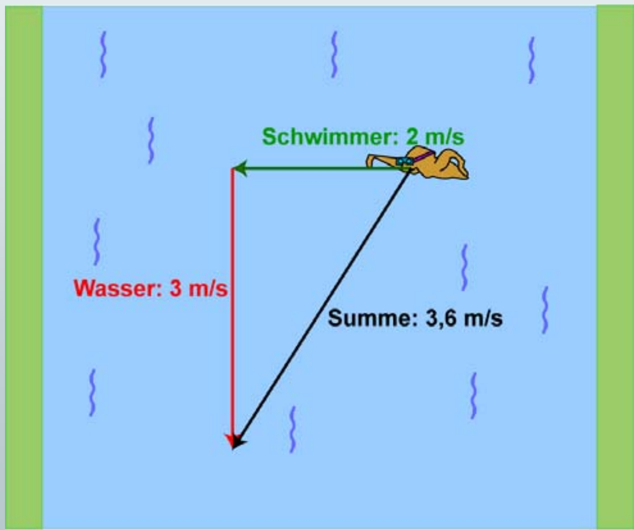
$$= \frac{d^2 r_x}{dt^2}\vec{e}_x + \frac{d^2 r_y}{dt^2}\vec{e}_y + \frac{d^2 r_z}{dt^2}\vec{e}_z$$

1.2.3 Superpositionsprinzip

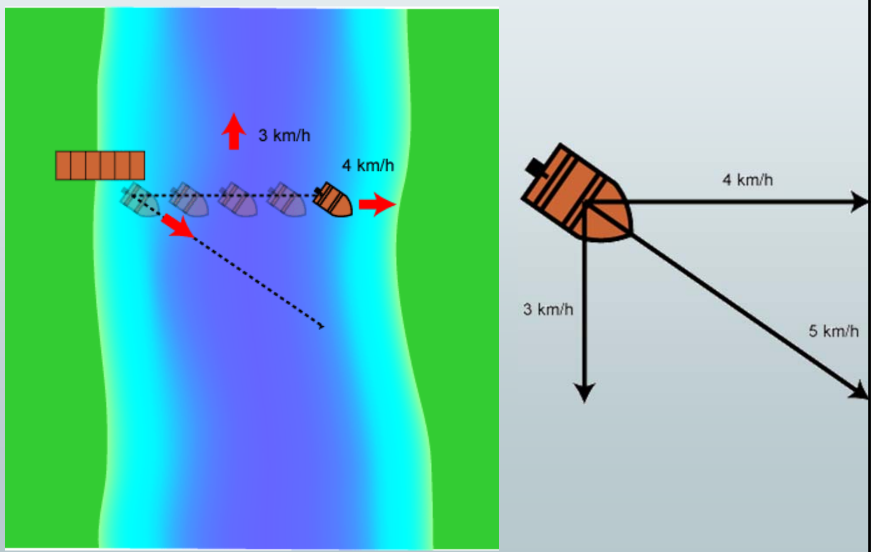


- Bewegungsabläufe lassen zusammengesetzt aus Teilbewegungen beschreiben

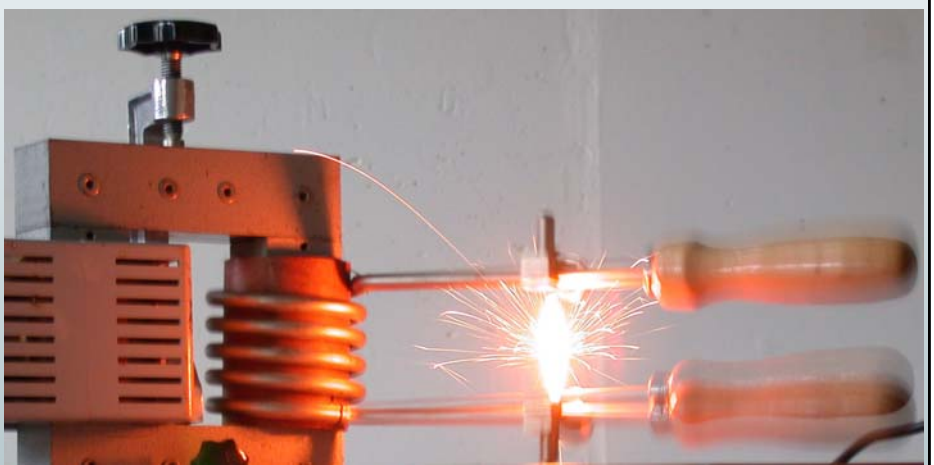
- Superpositionsprinzip – Addition von Geschwindigkeiten



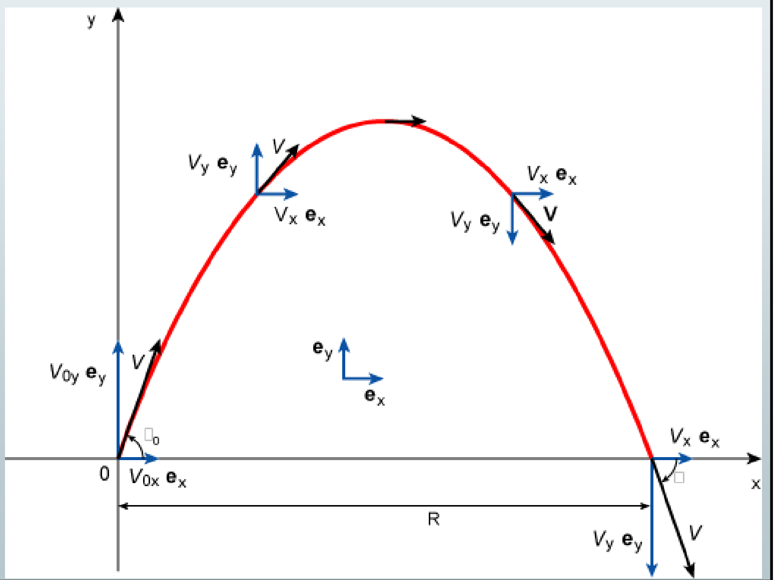
- Superpositionsprinzip – Addition von Geschwindigkeiten



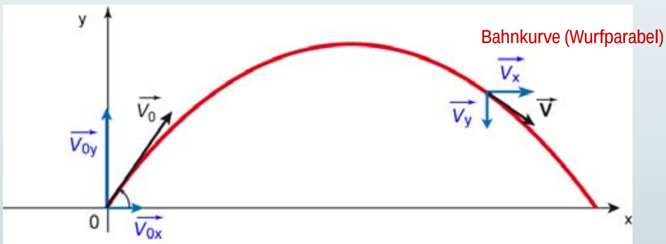
- Superpositionsprinzip – der schiefe Wurf



- Superpositionsprinzip – der schiefe Wurf



- Superpositionsprinzip – der schiefe Wurf



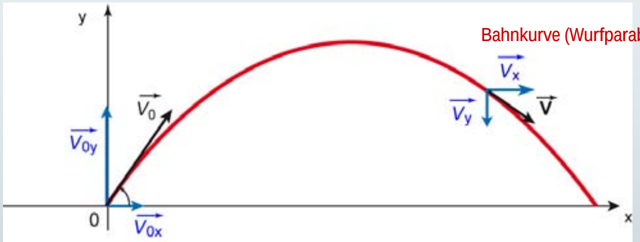
$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 0 \\ -g \\ 0 \end{pmatrix};$$

- Superpositionsprinzip – der schiefe Wurf

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 0 \\ -g \\ 0 \end{pmatrix};$$

$$\vec{v} = \begin{pmatrix} v_{0x} \\ v_{0y} - gt \\ 0 \end{pmatrix};$$

- Superpositionsprinzip – der schiefe Wurf



$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 0 \\ -g \\ 0 \end{pmatrix};$$

$$\vec{v} = \begin{pmatrix} v_{0x} \\ v_{0y} - gt \\ 0 \end{pmatrix};$$

$$\vec{r} = \begin{pmatrix} v_{0x} \cdot t \\ v_{0y} \cdot t - \frac{1}{2} g t^2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix};$$

- Der schiefe Wurf

a) Bahnkurve

- Der schiefe Wurf

a) Bahnkurve (y(t)-Kurve)

$$\left.\begin{array}{ll} 1) & y = v_{0y} \cdot t - \frac{1}{2} g t^2 \\ 2) & x = v_{0x} \cdot t \end{array}\right\} t \text{ eliminieren} \qquad t = \frac{x}{v_{0x}}$$

$$\text{in 1)} \quad y = v_{0y} \frac{x}{v_{0x}} - \frac{1}{2} g \frac{x^2}{v_{0x}^2}$$

$$\boxed{y(x) = \frac{v_{0y}}{v_{0x}} x - \frac{1}{2} \frac{g}{v_{0x}^2} x^2}$$

(Wurfparabel)

$$\boxed{y(x) = \tan\varphi_0 \cdot x - \frac{1}{2} g \frac{x^2}{v_0^2 \cdot \cos^2 \varphi_0}}$$

Der schiefe Wurf

b) Steighöhe

Der schiefe Wurf

b) Steighöhe

$$v_y(t_s) \overset{!}{=} 0$$

$$v_{0y} - g \cdot t_s = 0 \qquad \Rightarrow \boxed{t_s = \frac{v_{0y}}{g}}$$ Steigzeit

$$y_{\max} = y(t_s) = v_{0y} \cdot t_s - \frac{1}{2} g \cdot t_s^2$$

$$= \frac{v_{0y}^2}{g} - \frac{1}{2} g \frac{v_{0y}^2}{g^2} = \frac{1}{2} \frac{v_{0y}^2}{g} = \frac{1}{2} \frac{v_{0y}^2}{g} \cdot \sin^2 \varphi_0$$

- Der schiefe Wurf

c) Wurfweite

- Der schiefe Wurf

c) Wurfweite

$$x_W = x(2t_s) = v_{0x} \cdot 2\frac{v_{0y}}{g}$$

$$= 2v_0 \cos\varphi_0 \cdot \frac{v_0 \cdot \sin\varphi_0}{g}$$

$$= \frac{v_0^2}{g} \cdot 2\sin\varphi_0 \cdot \cos\varphi_0$$

$$\boxed{= \frac{v_0^2}{g} \cdot \sin(2\varphi_0) = x_W(\varphi_0)}$$

Wurfweite abh. von Abwurfgeschwindigkeit und Abwurfwinkel

- Der schiefe Wurf

d) Maximale Wurfweite

- Der schiefe Wurf

d) Maximale Wurfweite

$$x_W \text{ maximal für: } \sin(2\varphi_m) = 1$$

$$2\varphi_m = \frac{\pi}{2}$$

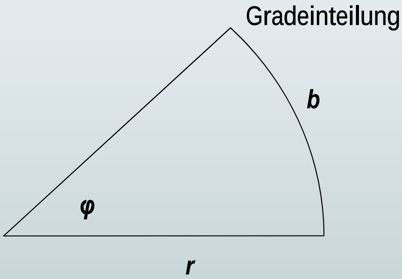
$$\boxed{\varphi_m = \frac{\pi}{4} = 45°}$$

1.2.4 Kinematik der Kreisbewegung

- Beispiele: Kurvenfahrt mit dem Auto, Volksfest, Erdbahn, Mondbahn

1.2.4 Kinematik der Kreisbewegung

- Winkel



$$\varphi = \frac{b}{r}$$ [φ]: Radiant (rad)

$$\text{Bogenmaß} = \frac{\text{Länge } b \text{ des Kreisbogens}}{\text{Länge } r \text{ des Radius}}\ \text{rad}$$

1.2.4 Kinematik der Kreisbewegung

- Winkel

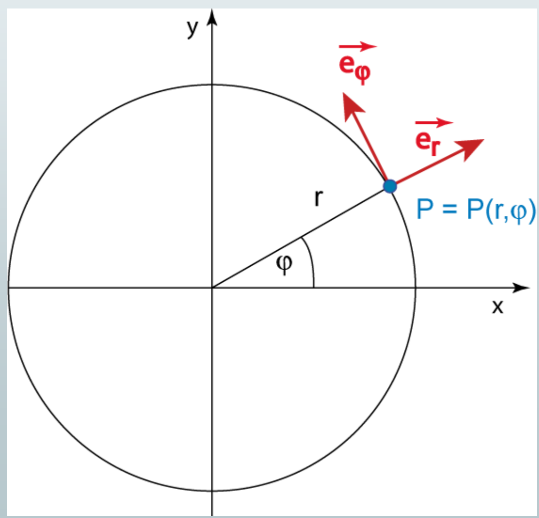
$$\text{Umfang eines Kreises}: b = 2\pi r \rightarrow$$
$$360° \text{ im Gradmaß entsprechen } 2\pi \text{ im Bogenmaß}$$

$$\frac{\varphi\,(\text{in Grad})}{360°} = \frac{\varphi\,(\text{in Bogenmaß})}{2\pi}$$

$$\text{Einheit des Bogenmaßes}: \frac{\varphi°}{360°} = \frac{1\,\text{rad}}{2\pi}$$

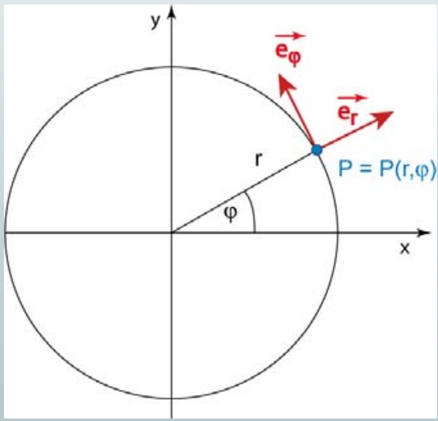
$$1\,\text{Radiant} \mathrel{\hat{=}} \frac{360°}{2\pi} = 57{,}3°$$

- Exkurs: Ebene Polarkoordinaten



1.2.4 Kinematik der Kreisbewegung

- Beschreibung der Kreisbewegung in Polarkoordinaten

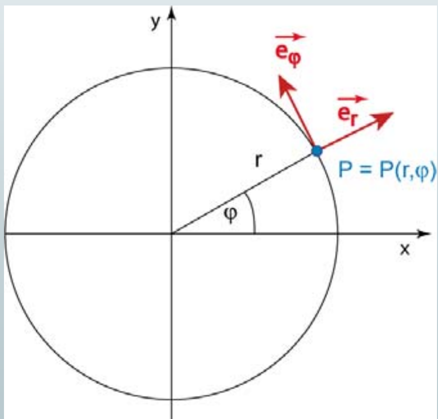


$r = konst.;$

$\varphi = \varphi(t);$

1.2.4 Kinematik der Kreisbewegung

- Beschreibung der Kreisbewegung in Polarkoordinaten



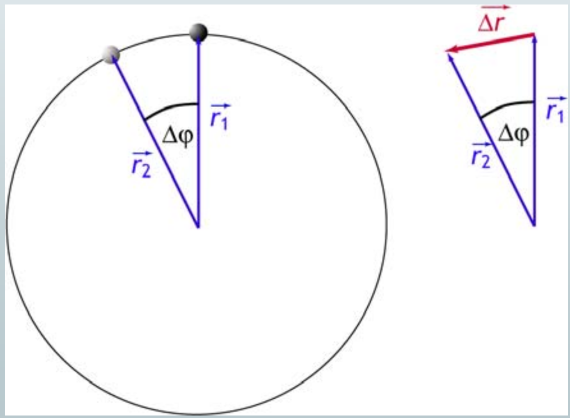
$r = konst.;$

$\varphi = \varphi(t);$

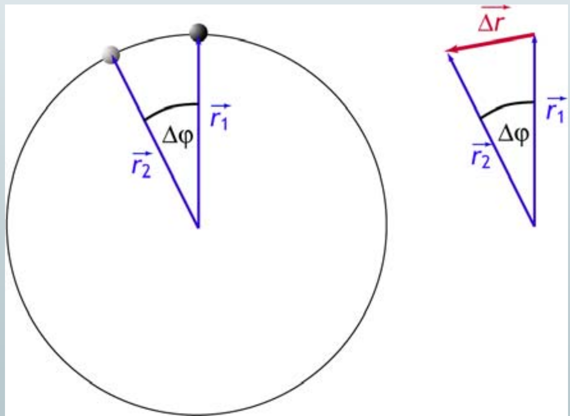
$x(t) = r \cdot \cos\varphi(t);$

$y(t) = r \cdot \sin\varphi(t);$

- Kreisbewegung - Geschwindigkeit



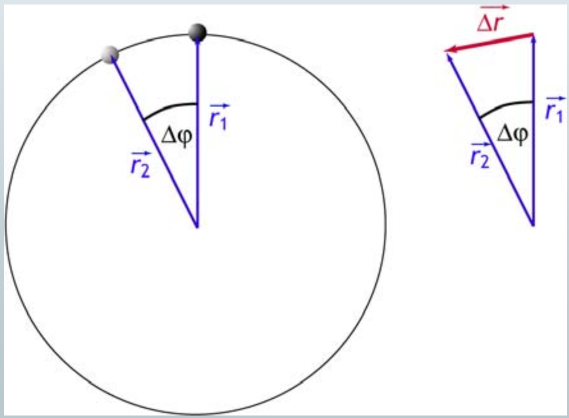
- Kreisbewegung – Geschwindigkeit: $\vec{v} = \lim\limits_{\Delta t \to 0} \frac{\overrightarrow{\Delta r}}{\Delta t}$



$r = konst.$

$$\vec{v} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{r \cdot \Delta\varphi}{\Delta t}\, \vec{e}_\varphi$$

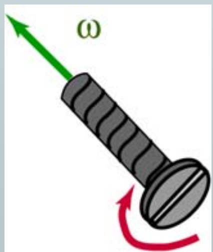
- Kreisbewegung – Geschwindigkeit: $\vec{v} = \lim\limits_{\Delta t \to 0} \frac{\overrightarrow{\Delta r}}{\Delta t}$

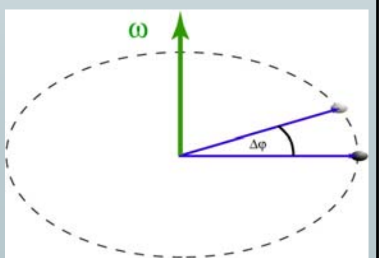


$r = konst.$

$$\vec{v} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{r \cdot \Delta\varphi}{\Delta t}\,\vec{e}_\varphi$$
$$= r \underbrace{\frac{d\varphi}{dt}}_{\omega}\,\vec{e}_\varphi$$

- Kreisbewegung – Winkelgeschwindigkeit
  - Definition: $\boxed{\omega := \frac{d\varphi}{dt};}$
  - für ω konst: $\omega = \frac{\Delta\varphi}{\Delta t} = \frac{2\pi}{T};$
  - genauer: ω ist Vektor

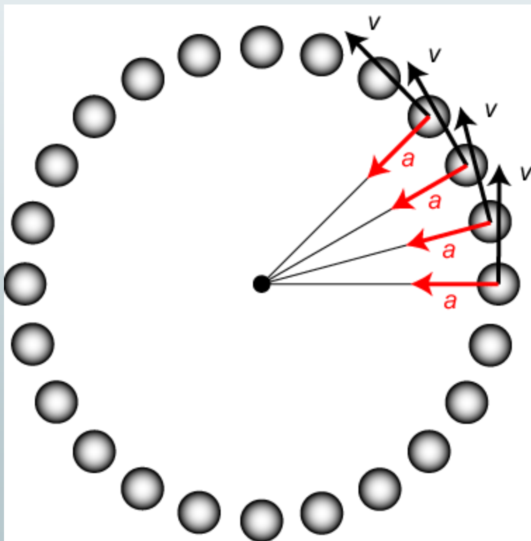




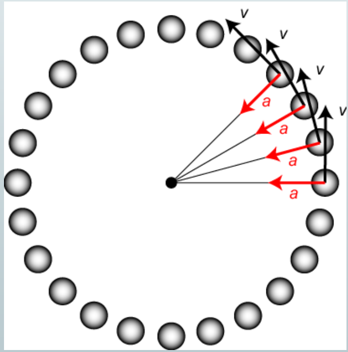
- Kreisbewegung
  - Geschwindigkeit & Winkelgeschwindigkeit: $v = |\vec{v}| = \omega \cdot r;$
  - Spezialfall: ω konst; v ***konst.*** **:**

$$\omega = \frac{2\pi}{T};$$
$$v_x = -r \cdot \omega \cdot \sin(\omega t + \varphi_0);$$
$$v_y = r \cdot \omega \cdot \cos(\omega t + \varphi_0);$$

- Kreisbewegung - Beschleunigung



- Kreisbewegung - Beschleunigung $$\boxed{\vec{a} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\overrightarrow{\Delta v}}{\Delta t}}$$



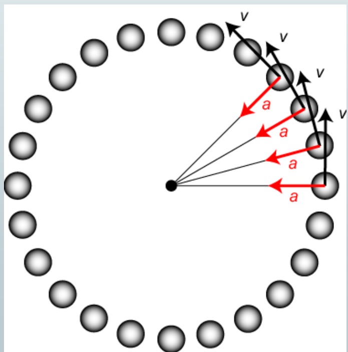
Spezialfall gleichförmige Kreisbewegung:

$r = konst.$

$$\vec{a} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{v \cdot \Delta\varphi}{\Delta t} (-\vec{e}_r)$$

1 Kinematik

- Kreisbewegung - Beschleunigung $$\vec{a} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\overrightarrow{\Delta v}}{\Delta t}$$

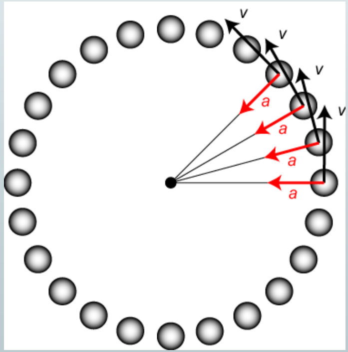


Spezialfall gleichförmige Kreisbewegung:

$r = konst.$

$$\vec{a} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{v \cdot \Delta\varphi}{\Delta t} (-\vec{e}_r)$$
$$= v \cdot \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\varphi}{\Delta t} (-\vec{e}_r) = v \cdot \omega \cdot (-\vec{e}_r)$$

- Kreisbewegung - Beschleunigung $\vec{a} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\overrightarrow{\Delta v}}{\Delta t}$



Spezialfall gleichförmige Kreisbewegung:

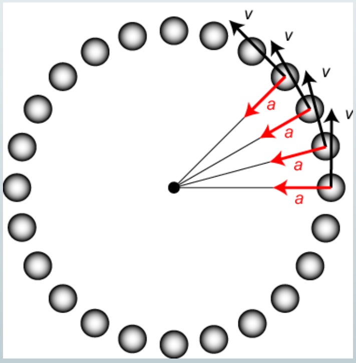
$r = konst.$

$$\vec{a} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{v \cdot \Delta\varphi}{\Delta t} (-\vec{e}_r)$$

$$= v \cdot \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\varphi}{\Delta t} (-\vec{e}_r) = v \cdot \omega \cdot (-\vec{e}_r)$$

$$\vec{a} = r \cdot \omega^2 \cdot (-\vec{e}_r) = \frac{v_t^2}{r}(-\vec{e}_r)$$

- Kreisbewegung - Beschleunigung $\vec{a} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\overrightarrow{\Delta v}}{\Delta t}$



Spezialfall gleichförmige Kreisbewegung:

$$\boxed{\vec{a} = r \cdot \omega^2 \cdot (-\vec{e}_r) = \frac{v_t^2}{r}(-\vec{e}_r)}$$

$$\boxed{|\vec{a}| = a = r \cdot \omega^2 = \frac{v_t^2}{r};}$$

Radialbeschleunigung,
Zentripedalbeschleunigung,
Zentralbeschleunigung

- Allgemein