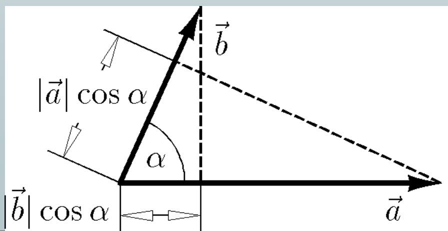
4 Arbeit, Energie, Leistung

- **Exkurs: Skalarprodukt**

  - **Skalarprodukt grafisch:**



Exkurs: Skalarprodukt

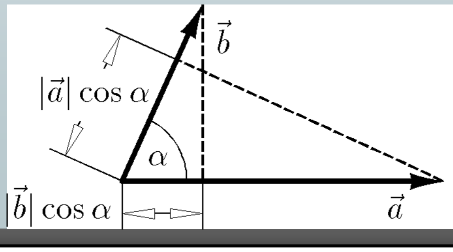
- Skalarprodukt mit Zwischenwinkel:

$$\vec{a}\cdot\vec{b} = |\vec{a}|\,|\vec{b}|\cos\left(\vec{a},\vec{b}\right) = ab\cos\alpha$$

- Im kartesischen Koordinatensystem:

$$\vec{a}\cdot\vec{b} = \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} b_x \\ b_y \\ b_z \end{pmatrix} = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z$$

- Skalarprodukt grafisch:



4 Arbeit, Energie, Leistung

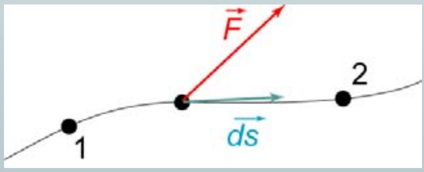
- Versuch: Gewicht in Hand – auf elast. Unterlage (Schwamm) – auf Tisch

- Der physikalische Arbeitsbegriff unterscheidet sich vom alltagssprachlichen

Kriterium: Eine Kraft wirkt über eine bestimmte Strecke hinweg (Ortsänderung – evtl. Bewegungszustand geändert)

Verschiebt eine Kraft F einen Körper um eine Wegstrecke ds, so verrichtet sie mechanische Arbeit dW.

Plausibel: Der Wert ist durch $\vec{F}$ und $d\vec{s}$ bestimmt.



$$dW = \vec{F} \cdot d\vec{s}$$

$$W = \int_1^2 \vec{F} \cdot d\vec{s} \left(= \int_{x_1}^{x_2} F_x \cdot dx + \int_{y_1}^{y_2} F_y \cdot dy + \int_{z_1}^{z_2} F_z \cdot dz \right)$$

Anm.: Stehen $\vec{F}$ und $d\vec{s}$ senkrecht, so ist dW = 0 (siehe Skalarprodukt)

Vorzeichen Konvention: W > 0: am System wird Arbeit verrichtet (zugeführt)
W < 0: das System verrichtet Arbeit

4.2 Energie

- Versuch: Wagen kann an schiefer Ebene 2 Wägen anheben
- Sprungscheibe "Klick"
- Wagen kann schiefe Ebene hochfahren
- Körper kann Körper heben (Flaschenzug)

- **Unter der Energie eines Systems versteht man dessen Fähigkeit Arbeit zu verrichten (sein „Arbeitsvermögen“)**

4.3 Energieformen

Grundformen: Kinetische Energieformen (Bewegungsenegie)

Potentielle Energieformen („Lageenergie“)

a) Kinetische Energie

$$F_x = m \cdot a_x$$

$$E_{kin} = W_{zu} = m \cdot a_x \cdot \Delta x$$

mit $v^2 = 2a_x \cdot \Delta x$ (aus Ruhe)

$$E_{kin} = \frac{1}{2} m \cdot v^2$$

allg.: $\Delta E_{kin} = \frac{1}{2} m \left(v_2{}^2 - v_1{}^2 \right) = W_B$ (Beschleunigungsarbeit)

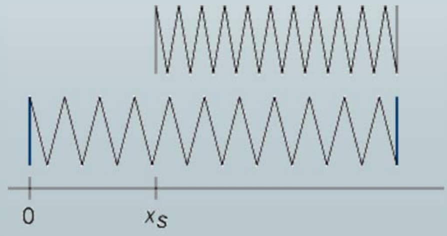
4.3 Energieformen

b) Hubarbeit und Höhenenergie

$$F = m \cdot g\,; \quad \Rightarrow E_{Pot,h} = m \cdot g \cdot h$$

➤ Versuch: Galilei-Pendel

c) Spannenergie einer Feder



4.3 Energieformen

b) Hubarbeit und Höhenenergie

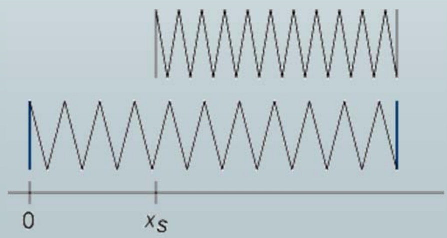
$$F = m \cdot g\,; \quad \Rightarrow E_{Pot,h} = m \cdot g \cdot h$$

➤ Versuch: Galilei-Pendel

c) Spannenergie einer Feder

$$F_s = D \cdot x\,; \quad \Rightarrow W_{Sp} = E_{Pot,Sp} = \int_0^{x_s} D \cdot x \cdot dx$$

$$E_{Pot,Sp} = \frac{1}{2} D \cdot x_s^{\,2}$$



- Weitere Energieformen:
  - Rotationsenergie
  - „Wärme“ / Innere Energie
  - Elektrische Energie
  - Magnetische Energie
  - Strahlungsenergie
  - Chemische Energie / Bindungsenergie
  - Kernenergie / Bindungsenergie der Nukleonen

- Quellen für unseren Energiebedarf:

Chemische Energie	Fossile Energieträger (Holz, Kohle, Öl, Gas), chemische Zellen (z. B. Blei-Akku, Zinkchlorid-, Natrium-Schwefel-Batterien) Wasserstoff-Verbrennung
Kernenergie	Kernspaltung und Kernfusion
Mechanische Energie	Wasser, Wind
Strahlungsenergie	Solarstrahlung
Wärmetauscher	Erdwärme, Temperaturunterschiede des Meeres
(Reduktion von Verlustenergie)	Nutzung von Abwärme

- Heizwerte - pro kg

Benzin	44 MJ
Heizöl	42 MJ
Erdgas	36 MJ
Steinkohle	24-30 MJ
Braunkohle	20 MJ
Holz	14-18 MJ
Rinde / Holzschnitzel	6 - 8 MJ

- Größenordnung einiger Energie-"Portionen"

Gravitationsenergie zw. Schülern	10^{-6} J
Geflüstertes Einsagen	10^{-3} J
Hufeisenmagnet	10^{1} J
KFZ (voller Tank)	10^{6} J
Blitz	10^{9} J
90 Jahre Nahrung	10^{10} J
Atombombe	10^{13} J
Wasserstoffbombe	10^{16} J

4.3 Energieformen

- **Verbrennungswärme der Nährstoffe**

Kohlenhydrate, Eiweiß	ca. 16 kJ / g
Fett	ca. 38 kJ / g

  - Energieinhalt (Nährwert) von Speisen – pro 100 g

Schokolade	2300 kJ
Brot	1000 kJ
Schnitzel	1000 kJ
Spagetti	1600 kJ
Kartoffeln	410 kJ

Verbrennung meist unvollständig

4.3 Energieformen

- **Verbrennungswärme der Nährstoffe**

Kohlenhydrate, Eiweiß	ca. 16 kJ / g
Fett	ca. 38 kJ / g

  - Energieinhalt (Nährwert) von Speisen – pro 100 g

Schokolade	2300 kJ
Brot	1000 kJ
Schnitzel	1000 kJ
Spagetti	1600 kJ
Kartoffeln	410 kJ

Verbrennung meist unvollständig

- **Kostmaß pro Tag:**

ca. 500 g	Kohlenhydrate
ca. 60 g	Fette
ca. 120 g	Eiweiß

- Leistung: Arbeit, die pro Zeitintervall verrichtet wird

$$\boxed{P = \frac{dW}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\vec{F} \cdot d\vec{s}\right) = \vec{F} \cdot \vec{v}}$$

↑ falls $\vec{F}$ zeitunabhängig

4.4 Leistung

- Leistung: Arbeit, die pro Zeitintervall verrichtet wird

$$\boxed{P = \frac{dW}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\vec{F} \cdot d\vec{s}\right) = \vec{F} \cdot \vec{v}}$$

↑ falls $\vec{F}$ zeitunabhängig

Leistung ist ein Skalar

$$[P] = 1\frac{\mathrm{J}}{\mathrm{s}} = 1\mathrm{W}$$

früher (1PS = 735,5 W)

4.4 Leistung

- Menschliche Leistungen (Messung z. B. mit Ergometern)

75 W	ganztägig
150 W	ca. 5 h
300 W	ca. 30 Min
750 W	ca. 1 Min
1500 W	ca. 5 s

4.4 Leistung

- Leistungswerte

Kraftwerke	ca. 1000 Megawatt (MW)
Motoren - Flugzeuge - PKW	 ca. 10 MW ca. 100 kW
Energieaufkommen / Leistung je Bürger (Tagesmittel)	ca. 6 kW
Nahrungsverbrauch (über 1 Tag gemittelt) - Schwerarbeiter - Durchschnittsbürger	 ca. 200 W ca. 120 W
Glühlampen	ca. 100 W
Mensch - (Höchstleistung einige s) - (Dauerleistung: Gehen mit 5 km/h)	 ca. 1 kW ca. 70 W
Akustik (Sprechen)	ca. 10 μW
Empfindlichkeitsgrenze für Wärmestrahlungsdetektoren	ca. 1 pW
Hörschwelle des Ohres bei 1000 Hz	ca. 0,1 fW

- **Wirkungsgrad:**

$$\boxed{\text{Wirkungsgrad} := \frac{\text{verrichtete (mech.) Arbeit}}{\text{zugeführte Energie}}}$$

- **Energieumsatz des erwachsenen Menschen (60kg) pro Stunde**

niedrigster Verbrauch	ca. 250 kJ
Zimmerruhe, gew. Kost	ca. 360 kJ
bei mäßiger Arbeit	ca. 420 kJ
bei starker Arbeit	ca. 630 kJ

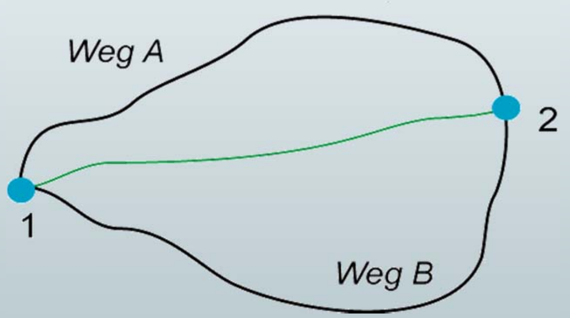
- **„Wirkungsgrad“ des Menschen:**

$$\text{Wirkungsgrad} := \frac{\text{verrichtete mech. Arbeit}}{\text{Stoffwechsel} - \text{Energieumsatz}} \approx 20\%$$

Vergleich der Energieumsätze beim Gehen in der Ebene und beim Heben des Körpers (Bergsteigen) über gleiche Zeiträume.

4.5 Weg unabhängige Arbeit, konservative Kräfte

Eine Kraft heißt konservativ, wenn die gesamte Arbeit entlang eines beliebigen, geschlossenen Weges gleich null ist.



$$\boxed{\oint \vec{F} \cdot d\vec{s} = 0}$$

4.5 Weg unabhängige Arbeit, konservative Kräfte

Die Arbeit, die eine konservative Kraft an einem Massenpunkt verrichtet, ist unabhängig davon, auf welchem Weg sich der Massenpunkt von einem Ort zu einem anderen bewegt.

$$\boxed{\Delta E_{pot} = -\int_A^B \vec{F} \cdot d\vec{s}}$$

$\vec{F}$: Kraft im System

$-\vec{F}$: von außen aufzubringende Kraft

Nur für konservative Kraftfelder ist eine pot. Energie definierbar

4.5 Weg unabhängige Arbeit, konservative Kräfte

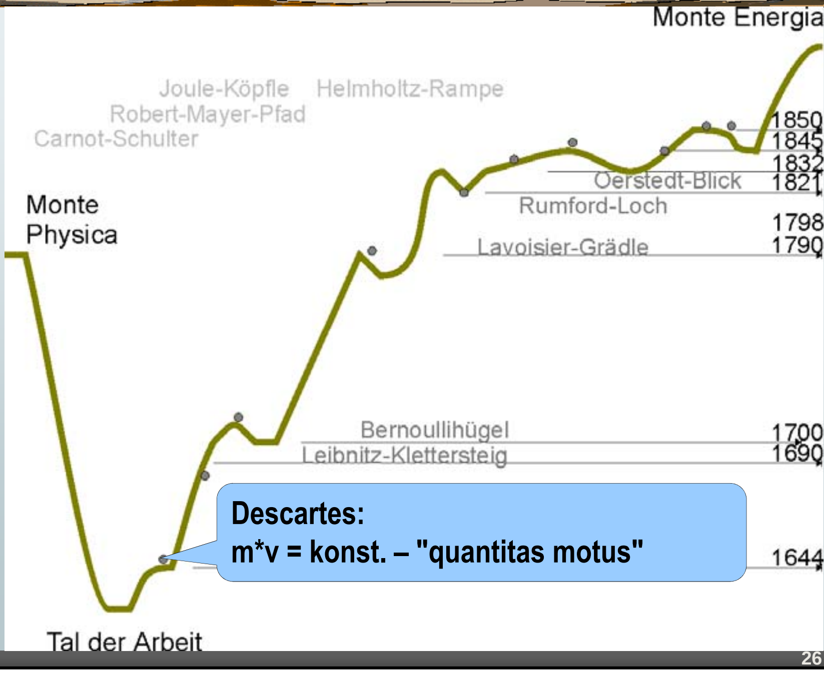
- **Potentielle Energie und Gleichgewicht (in einer Dimension)**

> **Versuch: Stehaufmännchen**

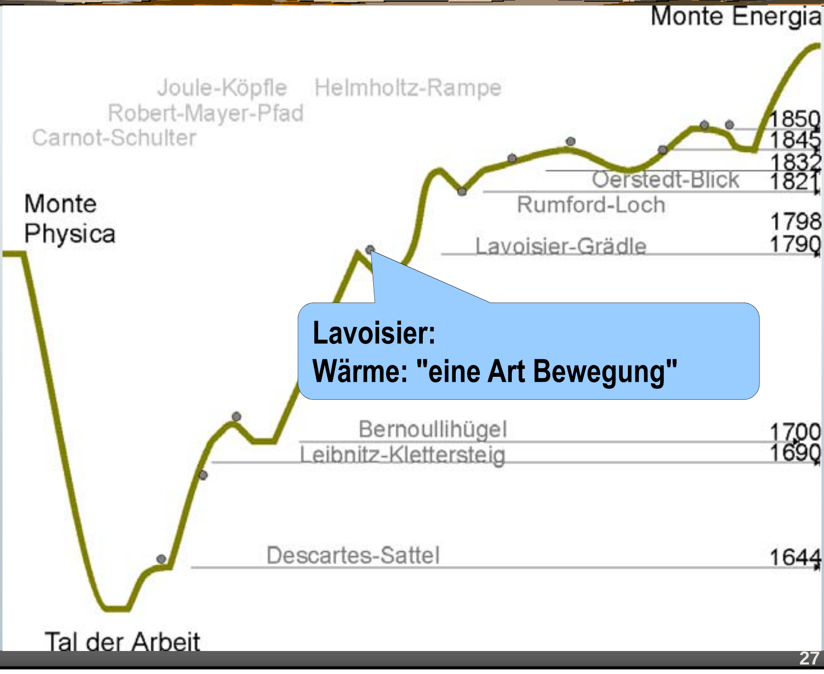
$$\Delta E_{pot} = -\vec{F} \cdot d\vec{s}$$
$$= -F_x \cdot dx$$
$$\Rightarrow \boxed{F_x = -\frac{dE_{pot}}{dx}}$$

$$\text{Ann.}: E_{kin} = 0$$
$$\Rightarrow \text{Wo } \mathrm{E_{pot}}(x) \min \rightarrow \text{stabiles Gleichgewicht}$$
$$\mathrm{E_{pot}}(x) \max \rightarrow \text{labiles Gleichgewicht}$$

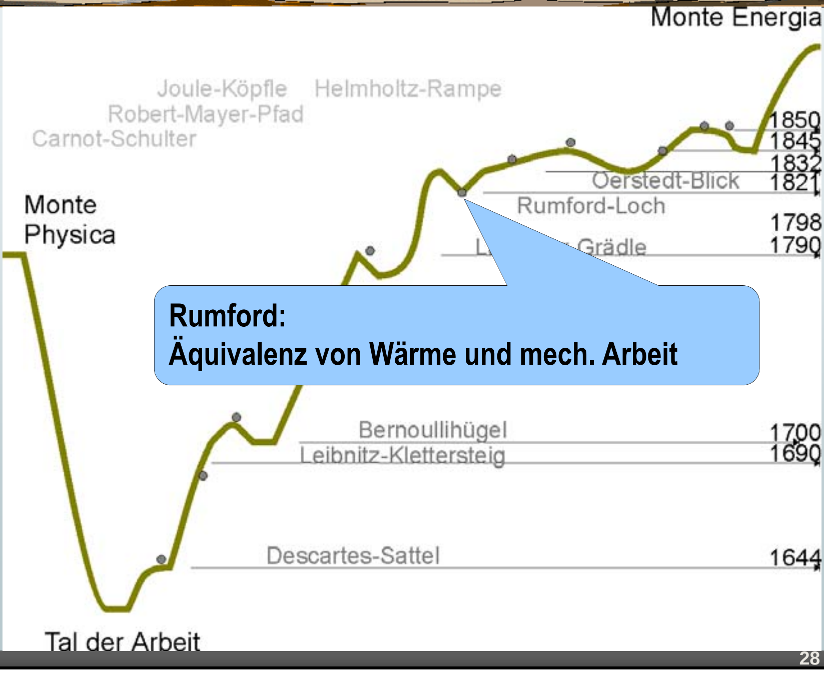
4.6 Energiesatz der Mechanik



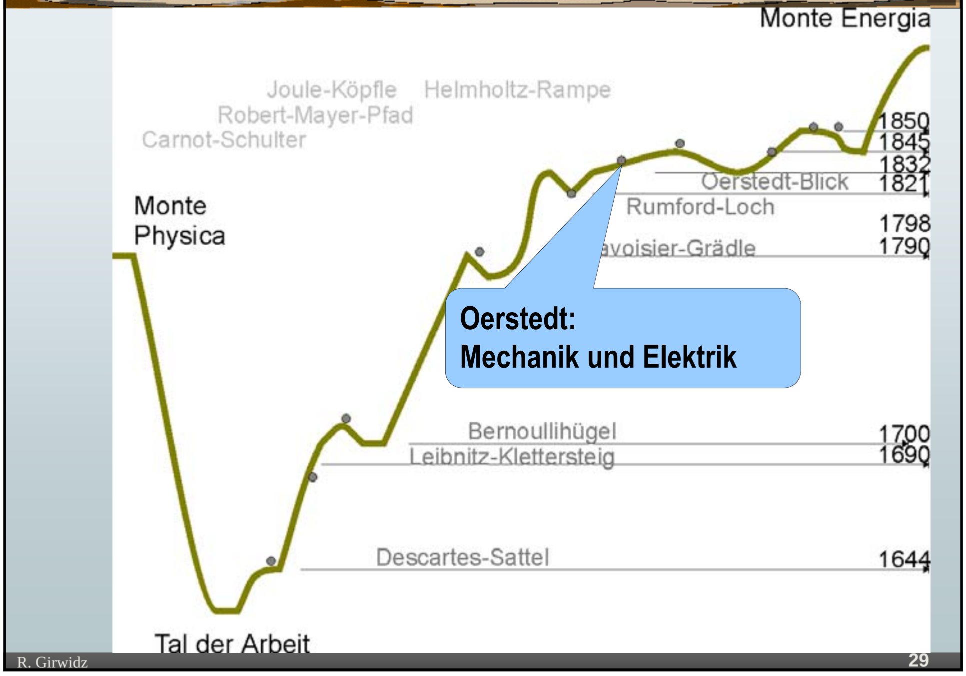
4.6 Energiesatz der Mechanik



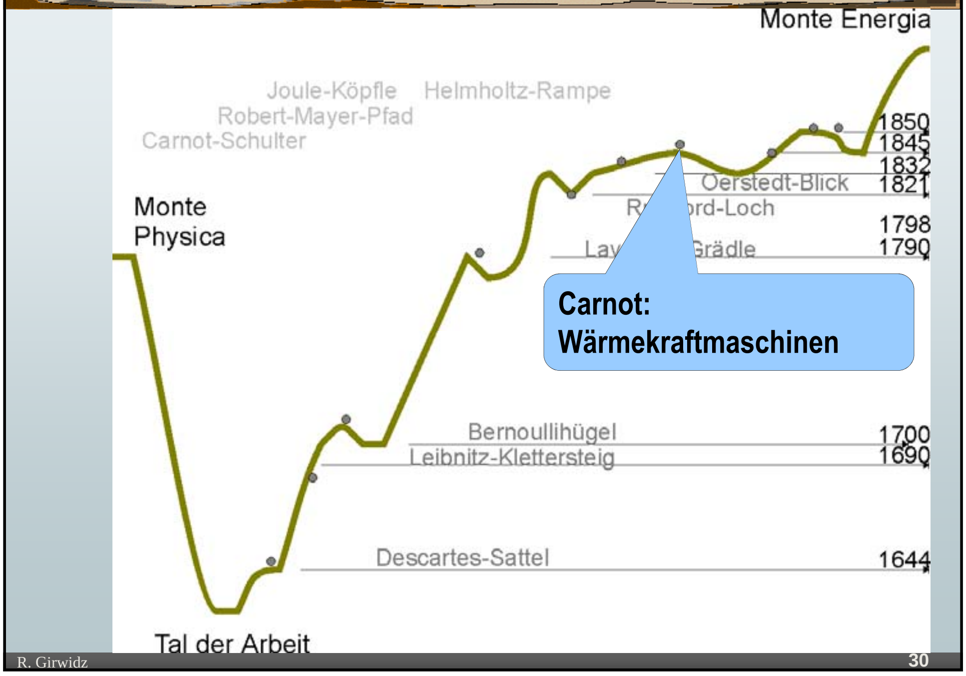
4.6 Energiesatz der Mechanik

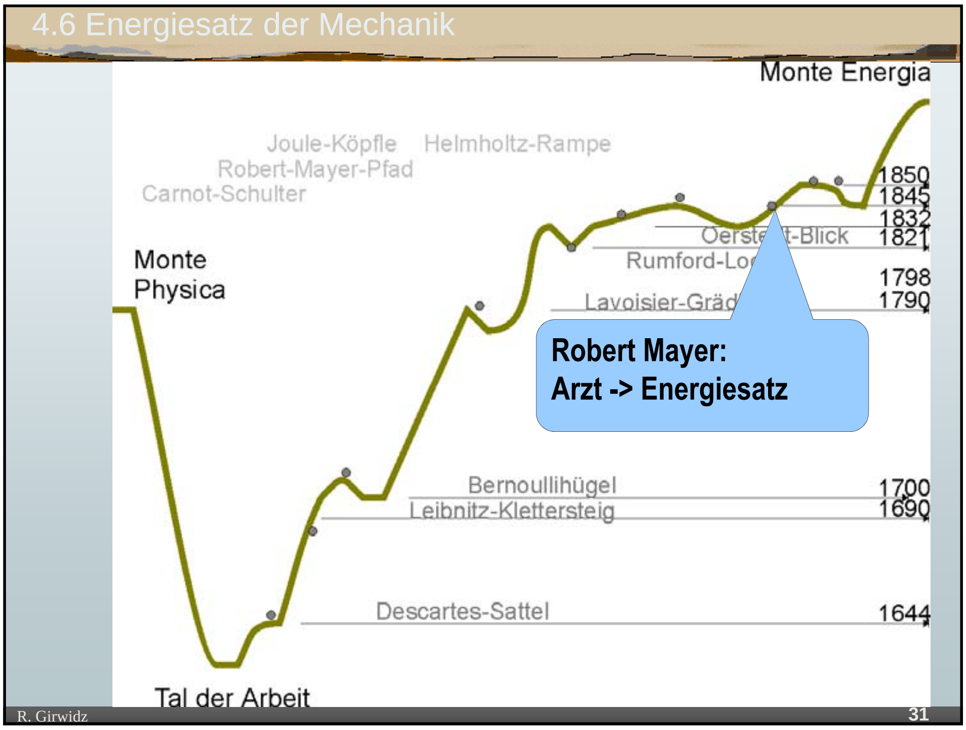


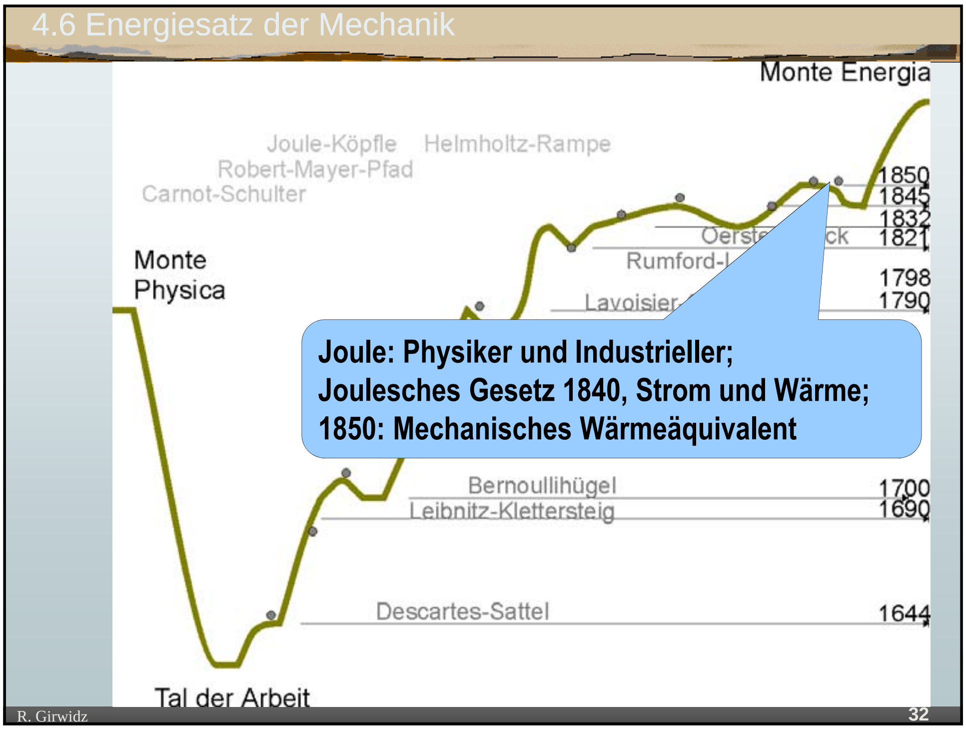
4.6 Energiesatz der Mechanik

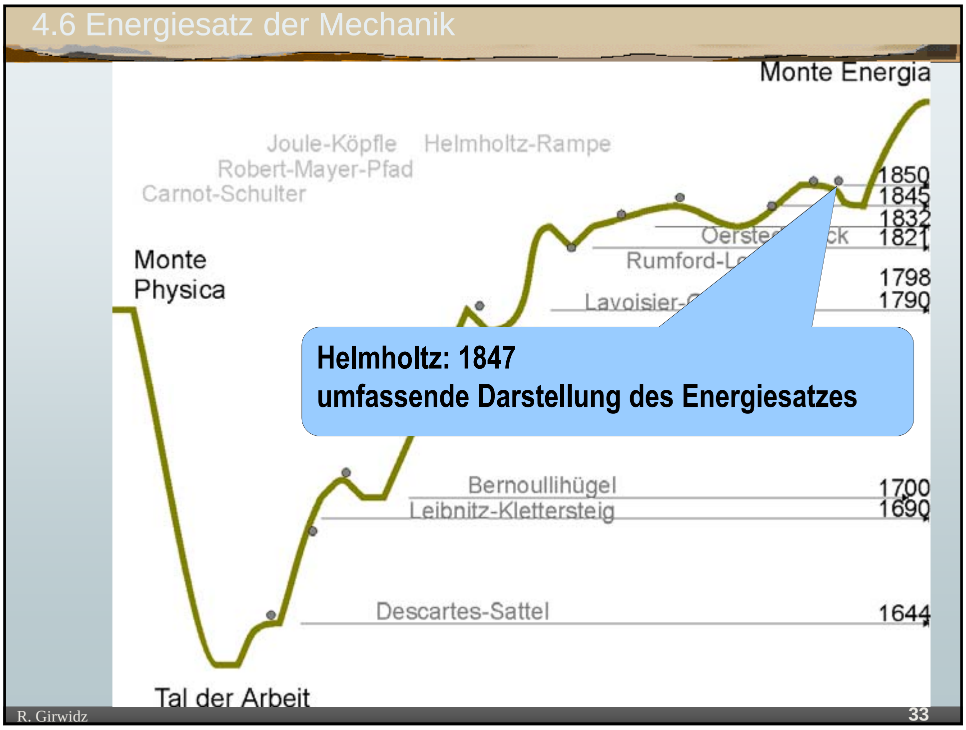


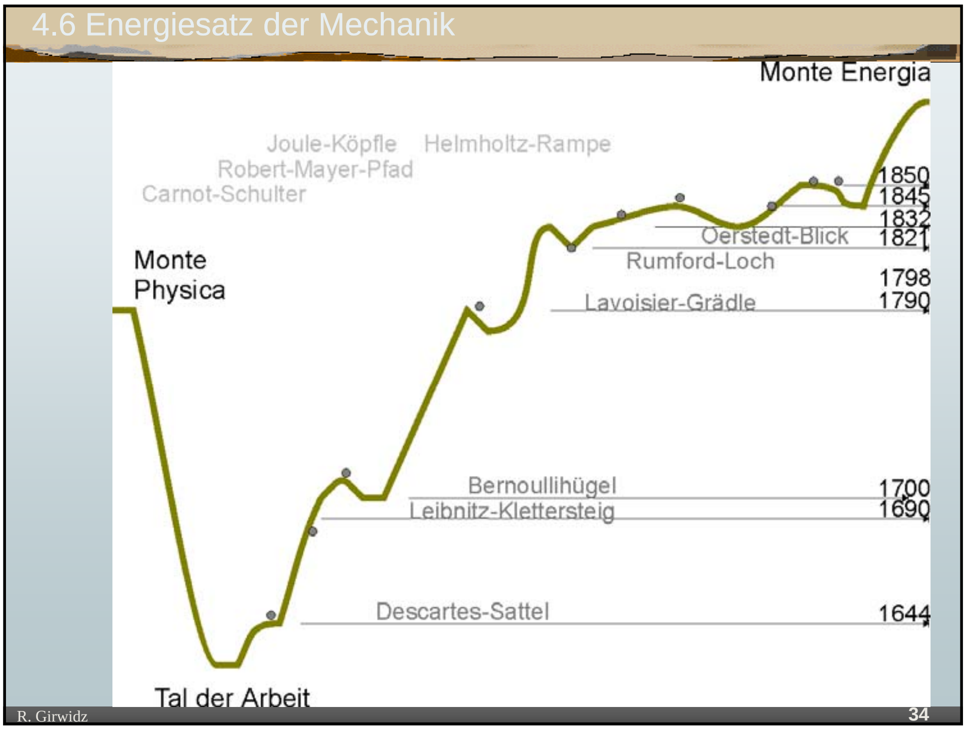
4.6 Energiesatz der Mechanik




4.6 Energiesatz der Mechanik
Monte Energia
Joule-Köpfle
Helmholtz-Rampe
Robert-Mayer-Pfad
Carnot-Schulter
Monte Physica
1850
1845
1832
1821
1798
1790
Robert Mayer:
Arzt -> Energiesatz
Bernoullihügel
Leibnitz-Klettersteig
1700
1690
Descartes-Sattel
1644
Tal der Arbeit
R. Girwidz
31


4.6 Energiesatz der Mechanik
Monte Energia
Joule-Köpfle
Helmholtz-Rampe
Robert-Mayer-Pfad
Carnot-Schulter
Monte Physica
1850
1845
1832
1821
1798
1790
Joule: Physiker und Industrieller;
Joulesches Gesetz 1840, Strom und Wärme;
1850: Mechanisches Wärmeäquivalent
Bernoullihügel
Leibnitz-Klettersteig
1700
1690
Descartes-Sattel
1644
Tal der Arbeit
R. Girwidz
32


4.6 Energiesatz der Mechanik
Monte Energia
Joule-Köpfle
Helmholtz-Rampe
Robert-Mayer-Pfad
Carnot-Schulter
Monte Physica
Rumford-L
Lavoisier-
1850
1845
1832
1821
1798
1790
Helmholtz: 1847
umfassende Darstellung des Energiesatzes
Bernoullihügel
Leibnitz-Klettersteig
1700
1690
Descartes-Sattel
1644
Tal der Arbeit
R. Girwidz
33


4.6 Energiesatz der Mechanik
Monte Energia
Joule-Köpfle
Helmholtz-Rampe
Robert-Mayer-Pfad
Carnot-Schulter
Monte Physica
Oerstedt-Blick
Rumford-Loch
Lavoisier-Grädle
1850
1845
1832
1821
1798
1790
Bernoullihügel
Leibnitz-Klettersteig
1700
1690
Descartes-Sattel
1644
Tal der Arbeit
R. Girwidz
34

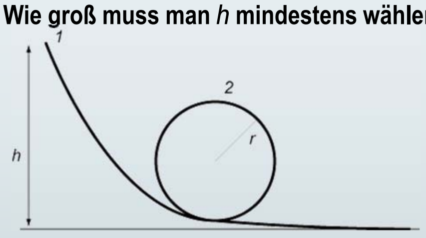
- **Energiesatz der Mechanik**

  In einem abgeschlossenen System (unter der Voraussetzung, dass nur konservative Kräfte wirken) bleibt die Summe aus kin. und pot. Energie konstant, d. h. die mechanische Gesamtenergie bleibt unverändert.

$$\boxed{\Delta E_{Ges} = 0 = \Delta E_{kin} + \Delta E_{pot}}$$

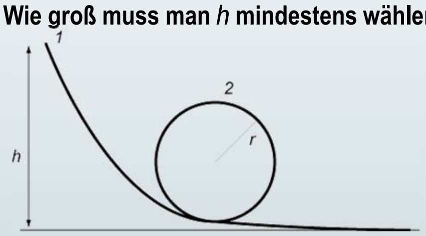
Die von einer nichtkonservativen Kraft verrichtete Arbeit entspricht der Änderung der mechanischen Gesamtenergie des Systems

Beispiel Überschlagbahn: Wie groß muss man *h* mindestens wählen



4.6 Energiesatz der Mechanik

Beispiel Überschlagbahn: **Wie groß muss man *h* mindestens wählen**



Bedingung für Pos. 2:

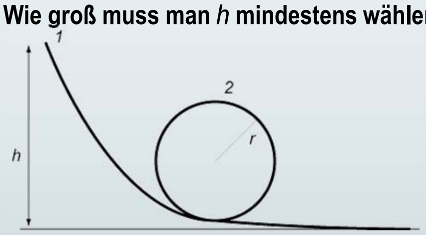
$$\frac{m \cdot v^2}{r} = m \cdot g$$

$$v^2 = g \cdot r$$

Energiebilanz: $\boxed{1}$ $\boxed{2}$

4.6 Energiesatz der Mechanik

Beispiel Überschlagbahn: **Wie groß muss man *h* mindestens wählen**



Bedingung für Pos. 2:

$$\frac{m \cdot v^2}{r} = m \cdot g$$

$$v^2 = g \cdot r$$

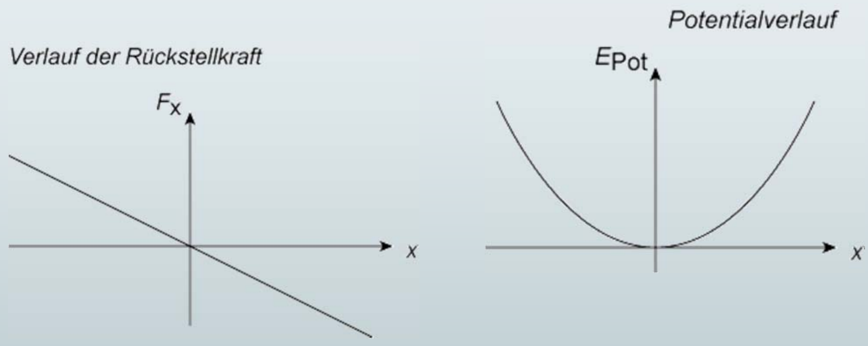
Energiebilanz: $\boxed{1}$ $\boxed{2}$

$$m \cdot g \cdot h = \frac{1}{2} m \cdot v^2 + m \cdot g \cdot 2 \cdot r$$

$$m \cdot g \cdot h = \frac{1}{2} g \cdot r \cdot m + 2 \cdot g \cdot r \cdot m$$

$$h = 2{,}5 \cdot r$$

4.6 Energiesatz der Mechanik

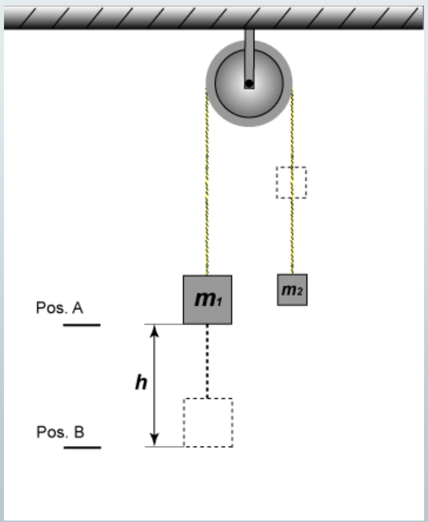


Lineares Kraftgesetz ⇔ parabelförmiges Pot.

$$F_i = -\frac{dE_{pot}}{dx} \qquad E_{pot} = -\int F_i \cdot dx$$

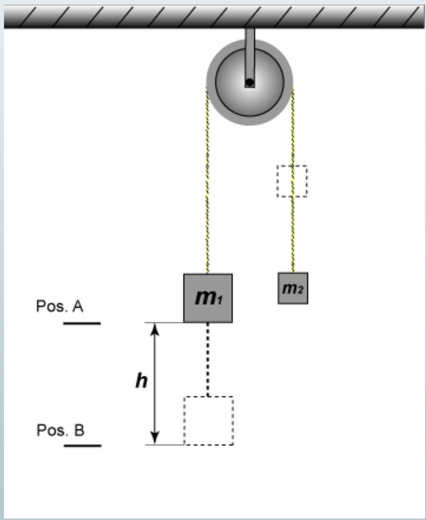
4.6 Energiesatz der Mechanik

Atwoodsche Fallmaschine



Fallbeschleunigung *g* über Kraftansatz

Atwoodsche Fallmaschine



Fallbeschleunigung *g* über Kraftansatz

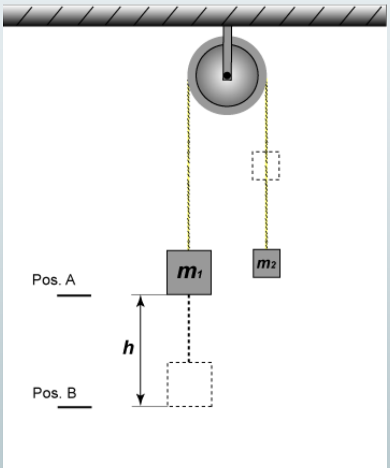
$$F = m \cdot a;$$

$$m_1 \cdot g - m_2 \cdot g = (m_1 + m_2) \cdot a$$

$$\boxed{g = \frac{m_1 + m_2}{m_1 - m_2} \cdot a}$$

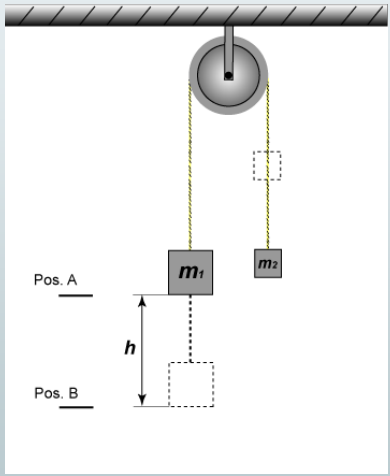
4.6 Energiesatz der Mechanik

Atwoodsche Fallmaschine



Fallbeschleunigung *g* über Energieansatz

Atwoodsche Fallmaschine



Fallbeschleunigung g über Energieansatz

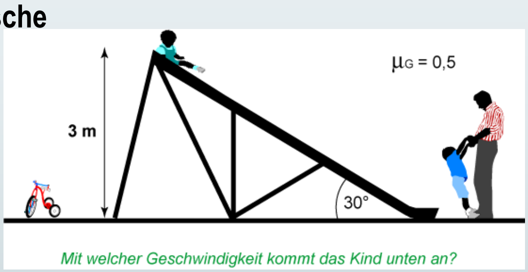
$$0 = -m_1gh + m_2gh + \frac{1}{2}m_1v_1^2 + \frac{1}{2}m_2v_2^2;$$

$$= g\cdot h\cdot(-m_1+m_2) + \frac{1}{2}m_1\cdot 2ah + \frac{1}{2}m_2\cdot 2ah;$$

$$= -g\cdot(m_1-m_2) + (m_1+m_2)\cdot a;$$

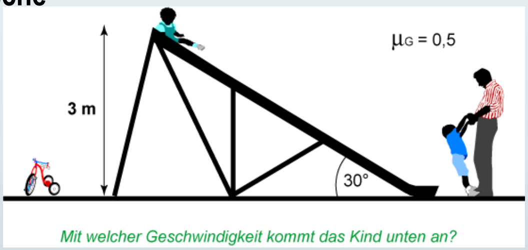
$$\boxed{g = \frac{m_1+m_2}{m_1-m_2}\cdot a}$$

Kinderrutsche



Mit welcher Geschw. kommt das Kind unten an?

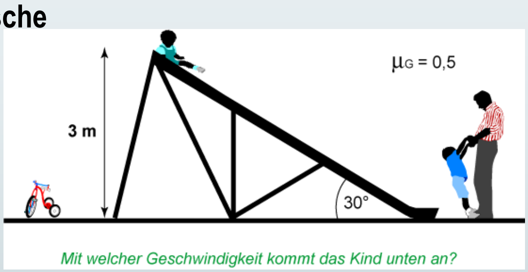
Kinderrutsche



Mit welcher Geschw. kommt das Kind unten an?

$$F_R = \mu_G \cdot m \cdot g \cdot \cos 30°$$
$$W_R = F_R \cdot s = \mu_G \cdot m \cdot g \cdot \cos 30° \cdot s$$

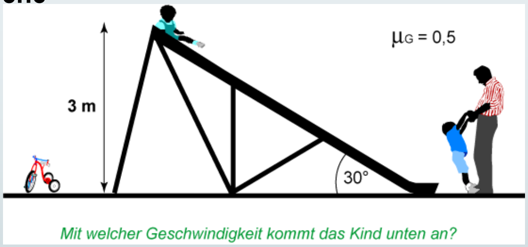
Kinderrutsche



Mit welcher Geschw. kommt das Kind unten an?

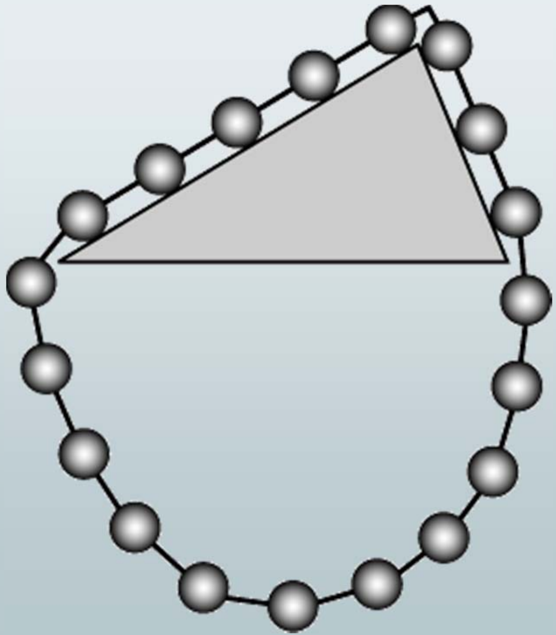
$$F_R = \mu_G \cdot m \cdot g \cdot \cos 30°$$
$$W_R = F_R \cdot s = \mu_G \cdot m \cdot g \cdot \cos 30° \cdot s$$
$$\Delta E_{Pot} = m \cdot g \cdot h$$
$$E_{Kin} = \Delta E_{Pot} - W_R$$

Kinderrutsche

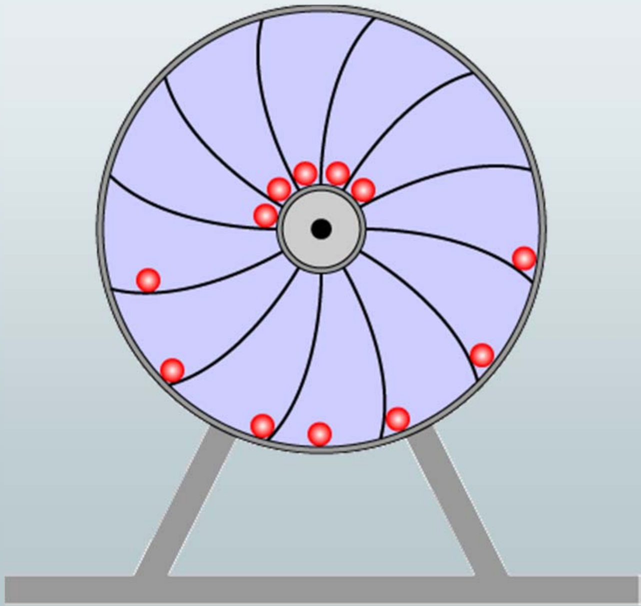


Mit welcher Geschw. kommt das Kind unten an?

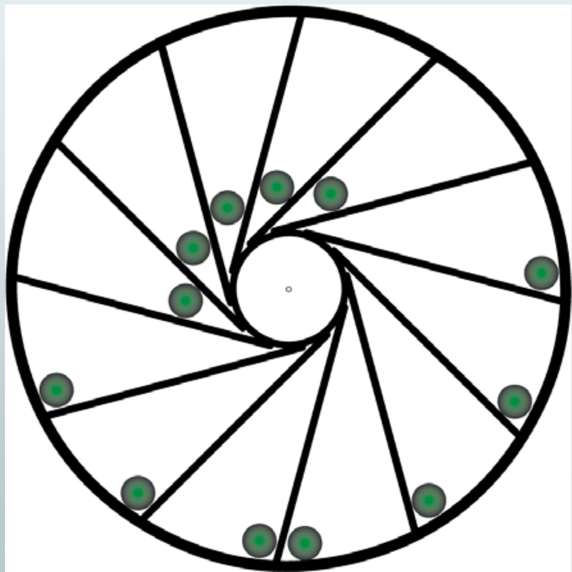
$$F_R = \mu_G \cdot m \cdot g \cdot \cos 30°$$
$$W_R = F_R \cdot s = \mu_G \cdot m \cdot g \cdot \cos 30° \cdot s$$
$$\Delta E_{Pot} = m \cdot g \cdot h$$
$$E_{Kin} = \Delta E_{Pot} - W_R$$
$$\frac{1}{2} m \cdot v^2 = m \cdot g \cdot h - \mu_G \cdot m \cdot g \cdot \cos 30° \frac{h}{\sin 30°}$$
$$v^2 = g \cdot h \cdot (2 - \mu_G \cdot \cos 30° \cdot 4)$$
$$\underline{\underline{v = 2{,}8\,\mathrm{ms}^{-1} \approx 10\,\mathrm{km/h}}}$$



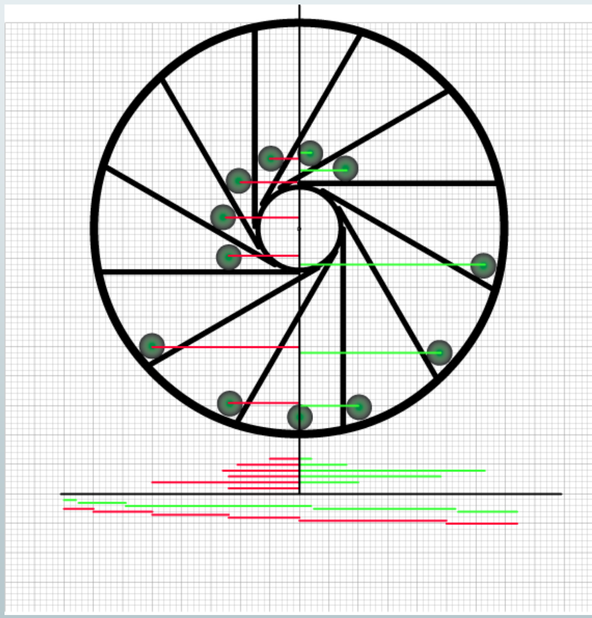
4.6 Energiesatz der Mechanik



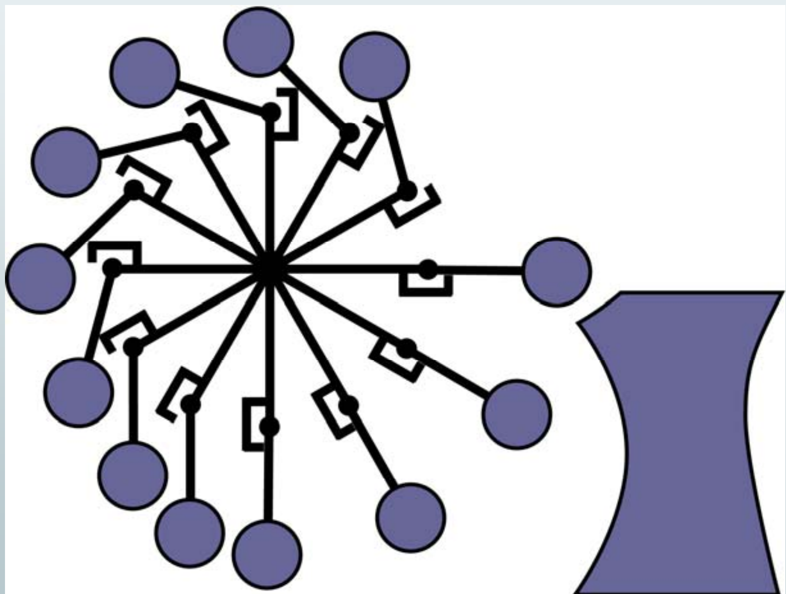
4.6 Energiesatz der Mechanik

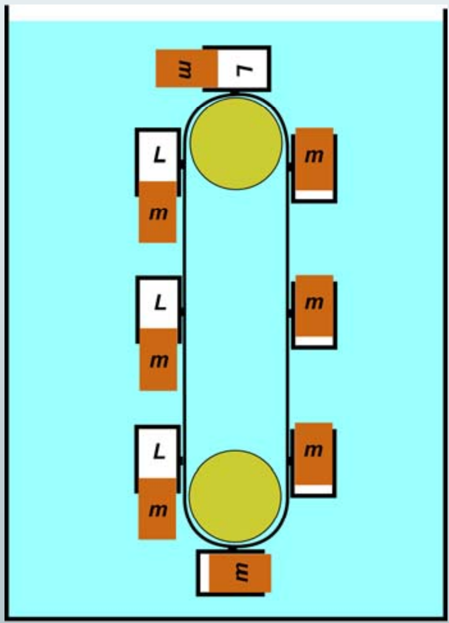


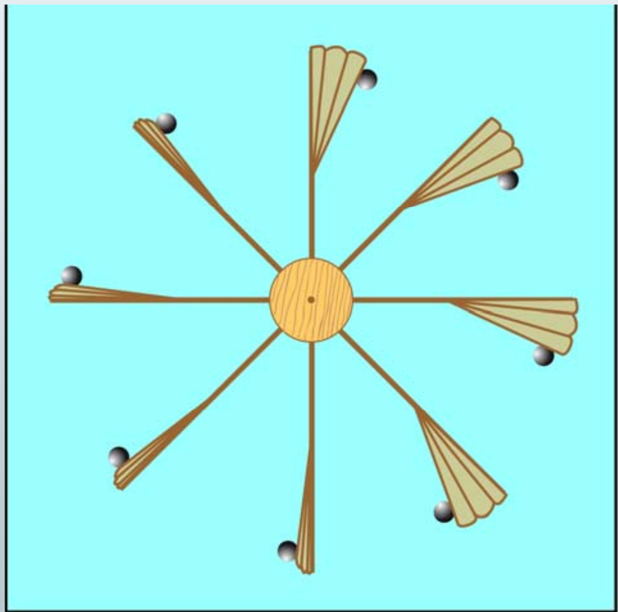
4.6 Energiesatz der Mechanik



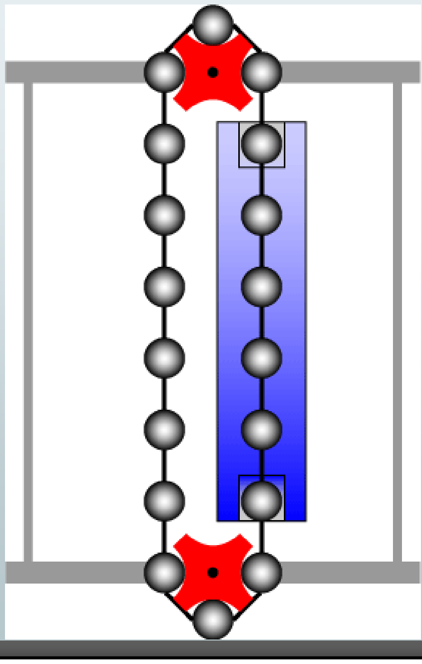
4.6 Energiesatz der Mechanik



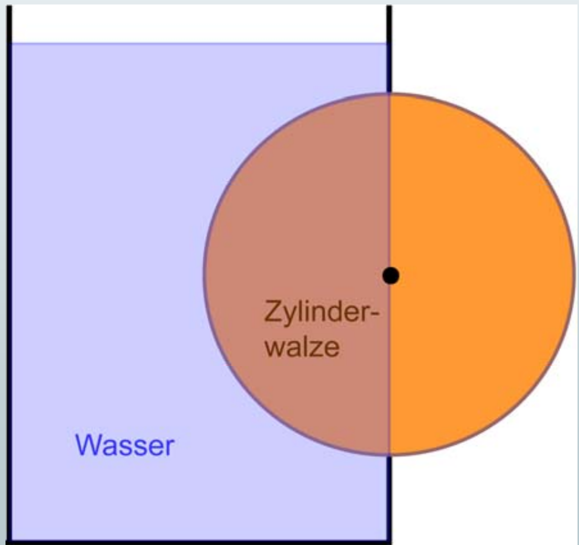

m
L
L
m
m
L
m
m
L
m
m
m



4.6 Energiesatz der Mechanik



4.6 Energiesatz der Mechanik



4.7 Einfache Maschinen

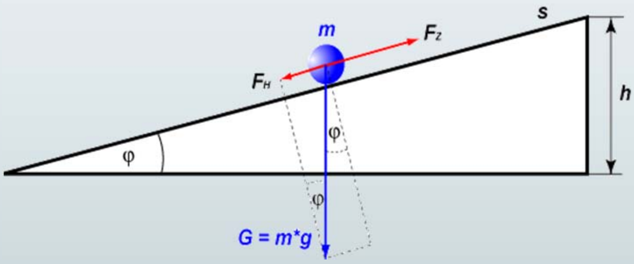
Prinzip bei mechanischen Maschinen:

Durch Vergrößerung des Weges genügt bei gleicher Arbeit eine geringere Kraft.

$$\boxed{W = \vec{F} \cdot \vec{s} = konst}$$

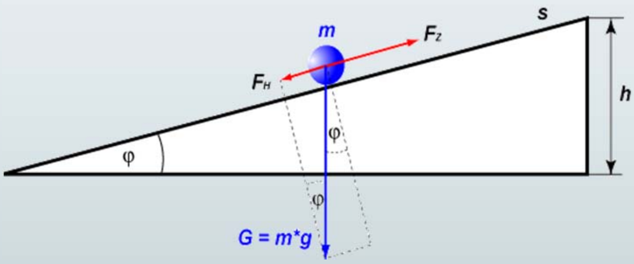
4.7 Einfache Maschinen

1. Beispiel: Schiefe Ebene



4.7 Einfache Maschinen

1. Beispiel: Schiefe Ebene



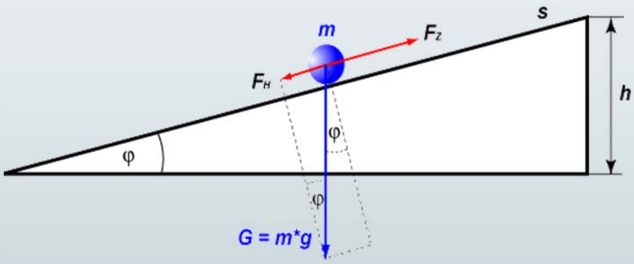
a) Über Schräge

Über Weg s wird Höhe h = s * sin φ erreicht.

Zugkraft: $F_z = G \cdot \sin\varphi < G = m \cdot g$

4.7 Einfache Maschinen

1. Beispiel: Schiefe Ebene

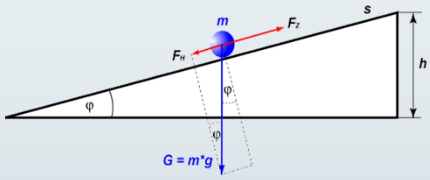


a) Über Schräge

Über Weg s wird Höhe h = s * sin φ erreicht.

Zugkraft: $F_z = G \cdot \sin\varphi < G = m \cdot g$

Arbeit: $W_1 = F_z \cdot s = G \cdot \sin\varphi \cdot \frac{h}{\sin\varphi} = G \cdot h$



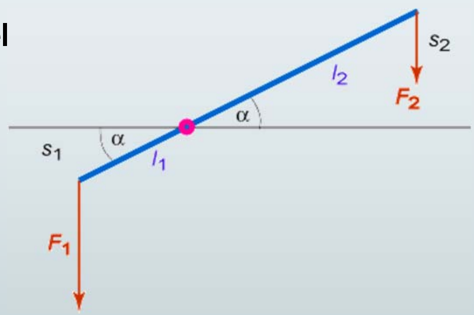
b) direkt

Hubarbeit W_2=m*g*h

$W_1 = W_2$

Gleiche Arbeit, aber bei der schiefen Ebene geringere Kraft nötig!

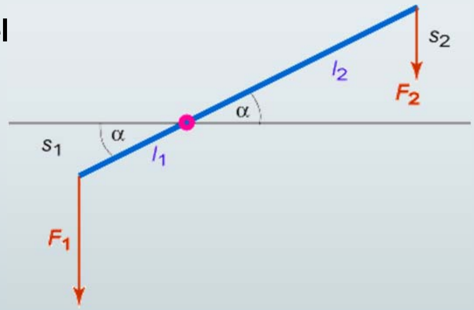
2. Beispiel: Hebel



Weg:

Arbeit:

2. Beispiel: Hebel

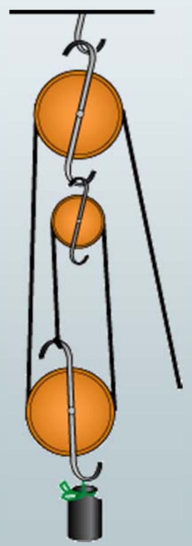


Weg: $s_1 = l_1 \cdot \sin(\alpha) \quad ; \quad s_2 = l_2 \cdot \sin(\alpha)$

Arbeit: $s_1 \cdot F_1 = s_2 \cdot F_2$

$$\Rightarrow l_1 \cdot \sin(\alpha) \cdot F_1 = l_2 \cdot \sin(\alpha) \cdot F_2$$
$$\Rightarrow F_1 : F_2 = l_2 : l_1$$

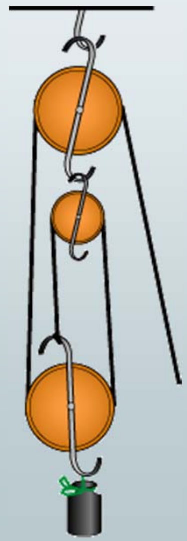
3. Beispiel: Flaschenzug



3. Beispiel: Flaschenzug

Gewichtskraft F_1 verteilt sich auf 3 Seilstücke. Daher ist F_2 = 1/3 F_1
Um die Last den Weg s_1 zu heben, müssen 3 Seilstücke um s_1 verkürzt werden.

$$s_2 = 3 \cdot s_1$$
$$\Rightarrow |F_1| \cdot |s_1| = |F_2| \cdot |s_2|$$



Goldene Regel der Mechanik:

Für Maschinen gilt:

Was an Kraft „gewonnen“ wird, geht an Weg „verloren“