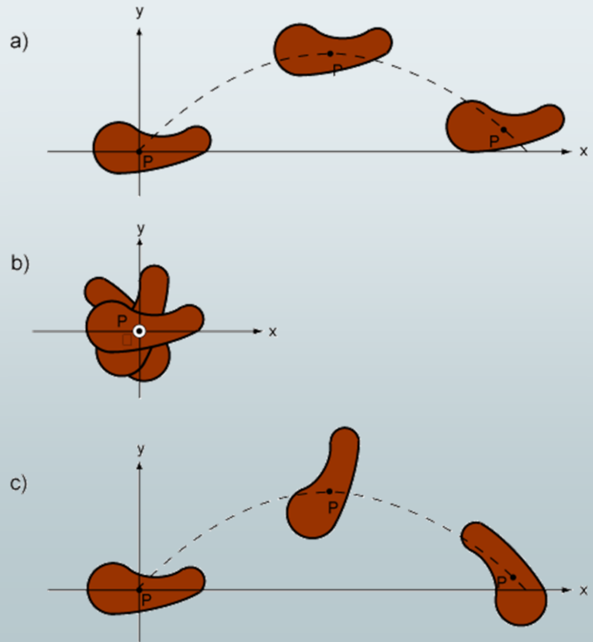
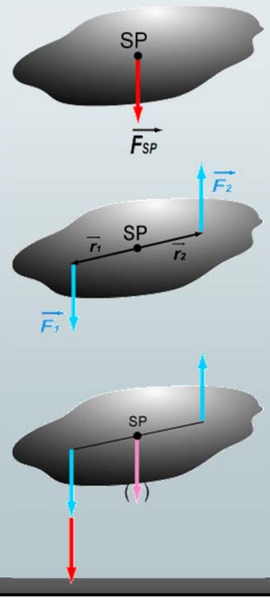
Schwerpunktsatz:

Der Schwerpunkt eines Körpers bewegt sich so, als ob die Gesamtmasse im Schwerpunkt vereinigt wäre und die Summe alle äußeren Kräfte dort angreifen würde.

Ist die Summe der äußeren Kräfte Null, so bewegt sich der Schwerpunkt geradlinig und gleichförmig.



Kräfte an einem frei beweglichen starren Körper



reine Translation

reine Rotation

Translation + Rotation

$$\sum_i \vec{F}_i \qquad \sum_i \left(\vec{r}_i \times \vec{F}_i\right)$$

7.1 Beschreibung des starren Körpers

a) Freiheitsgrade

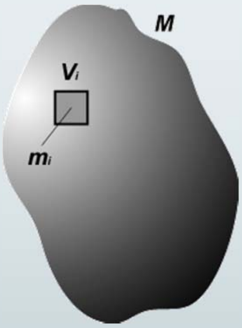
Massenpunkt:	3f	(f: Freiheitsgrade)
ausgedehnter Körper:	6f	

b) Translation

c) Rotation

Die allg. Bewegung eines starren Körpers lässt sich aus Translation und Rotation zusammensetzen.

Exkurs Dichte



$$M = \sum_i m_i \rightarrow M = \int_V dm$$

$$V = \sum_i V_i \rightarrow V = \int_V dV$$

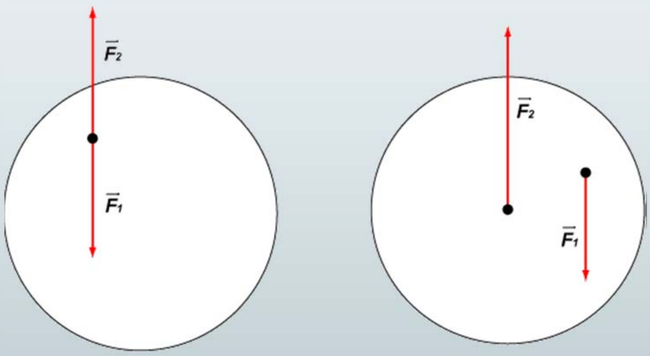
$$\boxed{\text{Dichte } \rho = \lim_{\Delta V \to 0} \frac{\Delta m}{\Delta V} = \frac{dm}{dV}}$$

Berechnung d. Masse aus der Dichte:

$$dM = \rho dV \rightarrow M = \int_V \rho dV$$

$$M = \int_z \left(\int_y \left(\int_x \rho dx \right) dy \right) dz$$

7.2 Kräfte am starren Körper- Drehmoment



$\vec{F}_1 = -\vec{F}_2$ keine Wirkung

Drehbewegung

(ohne Translation wenn $|\vec{F}_1| = |\vec{F}_2|$)

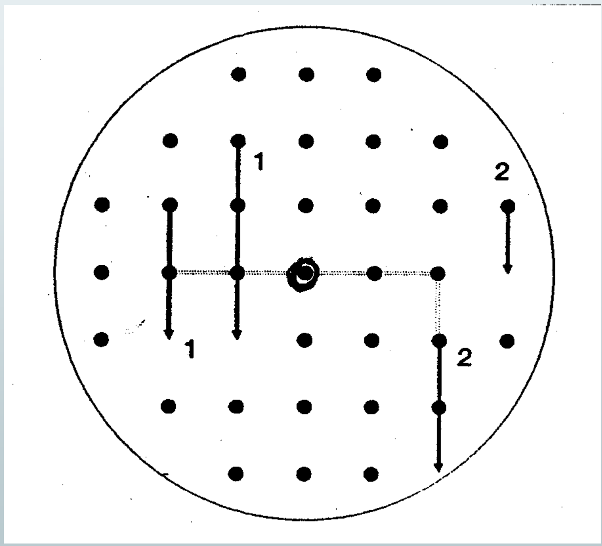
- **Drehmomentenscheibe F_2 greift zunächst in SP an**

- **Maßstab hochheben**
- **Balkenwaage**

- **Wirkungslinie an Drehmomentscheibe**

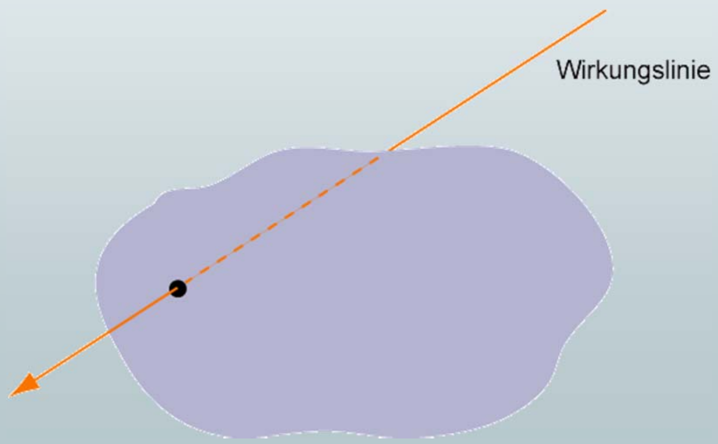
- **Hebel bleibt in Ruhe, wenn:** $F_1 \cdot l_1 = F_2 \cdot l_2$
- **Die drehbar gelagerte Scheibe bleibt auch in Ruhe, wenn die Angriffspunkte der Kräfte vertikal verschoben werden.**

7.2 Kräfte am starren Körper- Drehmoment



7.2 Kräfte am starren Körper- Drehmoment

Am starren Körper kann man den Angriffspunkt einer Kraft beliebig längs ihrer Wirkungslinie verschieben, ohne das sich die Wirkung dieser Kraft ändert:



7.2 Kräfte am starren Körper- Drehmoment

Kräfte am starren Körper:

a) Angriffspunkt der Kraft entscheidend (aber b)

b) Kräfte am starren Körper sind „linienflüchtig“,
d.h. entscheidend ist der senkrechte Abstand von der Drehachse

c) Kraftrichtung (Winkel) entscheidend

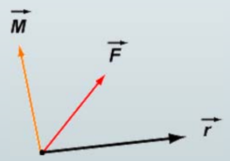
7.2 Kräfte am starren Körper- Drehmoment

Def. Drehmoment: $\boxed{\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F}}$ **(“=Kraft x Hebelarm“)**

Betrag:

$$\left|\vec{M}\right| = \left|\vec{r}\right| \cdot \left|\vec{F}\right| \cdot \sin\varphi$$

Richtung:

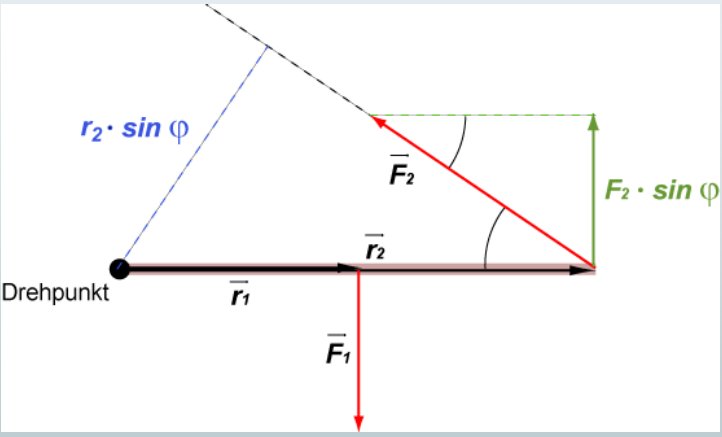


Senkrecht auf $\vec{r}$ und $\vec{F}$
"rechte - Hand - Regel"

Einheit: **Nm**

Mehrere Drehmomente addieren sich vektoriell!

Beispiel:



$r_2 = 2r_1$;
$F_1 = 5N$;

Wie groß muss F_2 sein, damit der Körper im Gleichgewicht bleibt?

$$\vec{M}_1 = \vec{r}_1 \times \vec{F}_1; \qquad M_1 = r_1 \cdot F_1$$

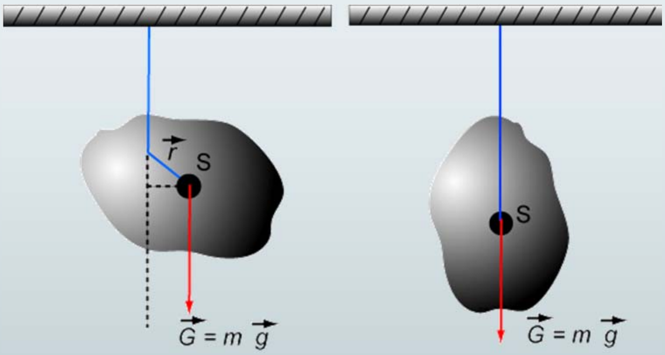
$$\vec{M}_2 = \vec{r}_2 \times \vec{F}_2; \qquad M_2 = r_2 \cdot F_2 \cdot \sin 45° = r_2 \cdot \underbrace{(F_2 \cdot \sin\varphi)}_{\text{Wirkungskomp. von F}}$$

$$= \underbrace{r_2 \cdot \sin\varphi}_{\text{Abstand der Wirkungslinie vom Drehpunkt}} \cdot F_2$$

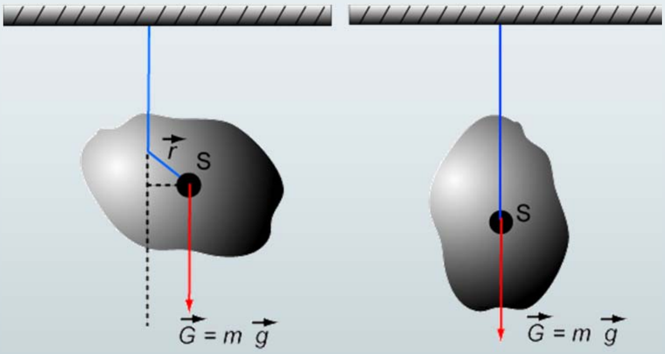
$$M_1 = M_2;$$

$$F_2 = F_1 \frac{r_1}{r_2 \cdot \sin 45°} \quad = 5N \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} \approx \underline{\underline{3{,}5N}};$$

7.2 Kräfte am starren Körper- Drehmoment



7.2 Kräfte am starren Körper- Drehmoment



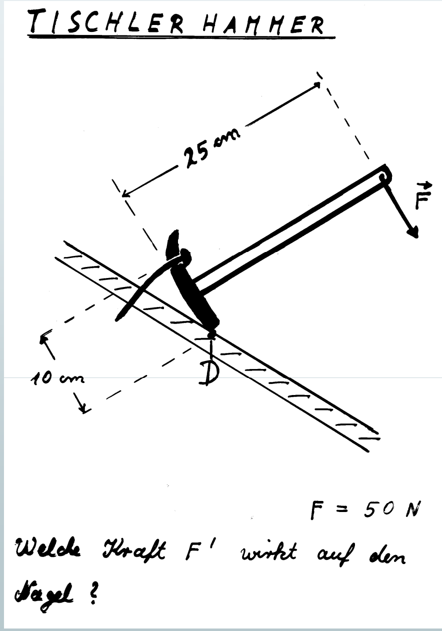
Der Schwerpunkt unregelmäßig geformter Körper lässt sich experimentell bestimmen
(Schnittpunkt der Schwerlinien).

Schwerkraft greift an S an und bewirkt Drehmoment, bis S unter dem Drehpunkt liegt.

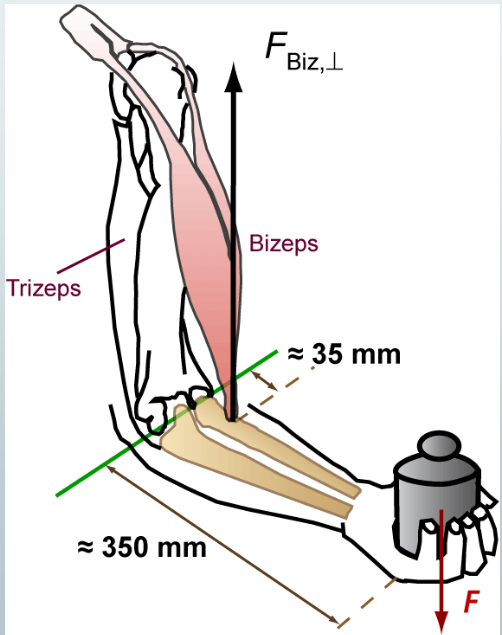
Statik:

Summe aller Kräfte Null: $\sum_i \vec{F}_i = 0$

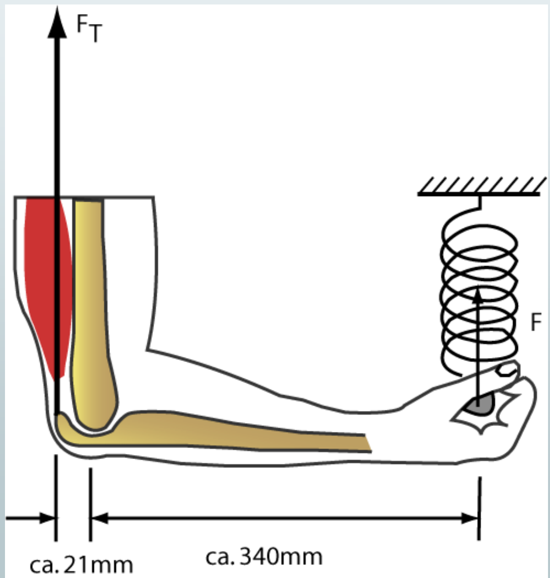
<u>und</u> Summe aller Drehmomente Null: $\sum_i \vec{M}_i = 0$



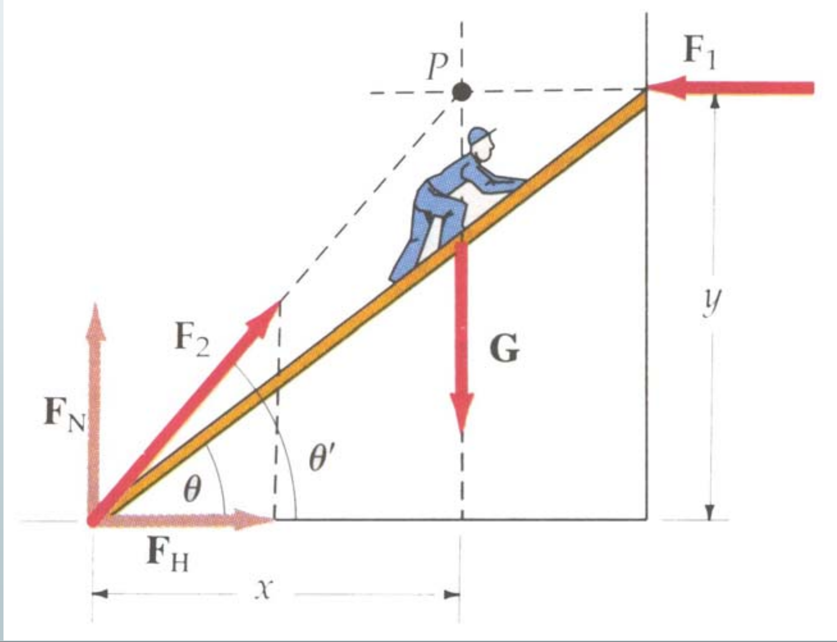
7.2 Kräfte am starren Körper- Drehmoment



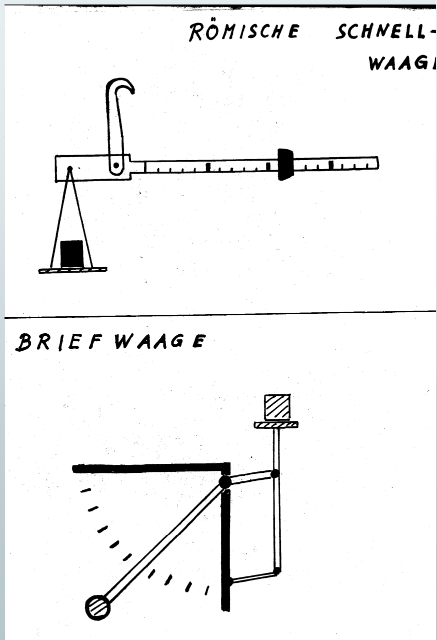
7.2 Kräfte am starren Körper- Drehmoment



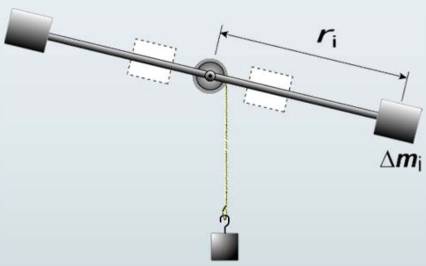
7.2 Kräfte am starren Körper- Drehmoment



7.2 Kräfte am starren Körper- Drehmoment



Dynamik

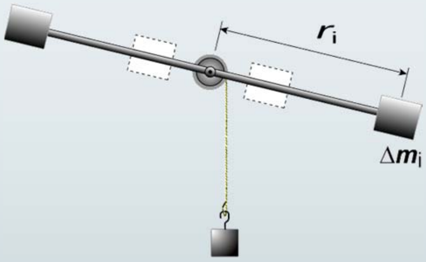


- Parallelversuch: Gleiche Höhenenergie wird in Rotationsenergie umgesetzt

Kinetische Energie des Massenelements:

$$E_{Kin_i} = \frac{1}{2}\Delta m_i \cdot v^2 = \frac{1}{2}\Delta m_i \cdot r_i^2 \omega^2$$

7.3 Rotationsenergie und Trägheitsmoment



- Parallelversuch:
  Gleiche Höhenenergie wird in Rotationsenergie umgesetzt

Kinetische Energie des Massenelements:

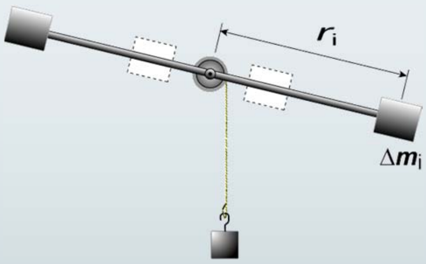
$$E_{Kin_i} = \frac{1}{2}\Delta m_i \cdot v^2 = \frac{1}{2}\Delta m_i \cdot r_i^2 \omega^2$$

Rotationsenergie des gesamten Körpers:

bei *i* Teilmassen: $$E_{Rot} = \sum_i E_{Kin_i} = \frac{1}{2}\omega^2 \sum_i \Delta m_i \cdot r_i^2$$

bei kontinuierlicher Massenverteilung:

7.3 Rotationsenergie und Trägheitsmoment



- Parallelversuch:
  Gleiche Höhenenergie wird in Rotationsenergie umgesetzt

Kinetische Energie des Massenelements:

$$E_{Kin_i} = \frac{1}{2}\Delta m_i \cdot v^2 = \frac{1}{2}\Delta m_i \cdot r_i^2 \omega^2$$

Rotationsenergie des gesamten Körpers:

bei *i* Teilmassen: $$E_{Rot} = \sum_i E_{Kin_i} = \frac{1}{2}\omega^2 \sum_i \Delta m_i \cdot r_i^2$$

bei kontinuierlicher Massenverteilung: $$E_{Rot} = \frac{1}{2}\omega^2 \int_V r^2 dm$$

Definition: Trägheitsmoment *I*

$$\boxed{I = \int_V r^2 \cdot dm = \int_V r^2 \rho \cdot dV}$$

[*I*] = kg m²

7.3 Rotationsenergie und Trägheitsmoment

Definition: Trägheitsmoment *I*

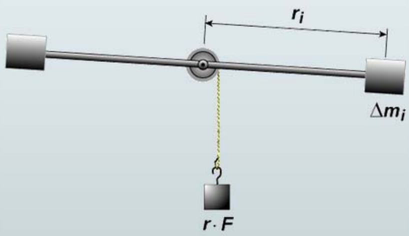
$$\boxed{I = \int_V r^2 \cdot dm = \int_V r^2 \rho \cdot dV}$$

[*I*] = kg m²

- *I* ist ein Maß für die Massenverteilung des Körpers bezüglich einer Rotationsachse
- *I* bezieht sich immer auf eine Rotationsachse
- Rotationsenergie: $\boxed{E_{Rot} = \frac{1}{2} I \omega^2}$

  analog zu: $E_{Kin} = \frac{1}{2} m v^2$

7.4 Drehmoment und Winkelbeschleunigung



- Verschiedene beschleunigende Massen

$$\dot{\omega} \sim M$$

Winkelbeschleunigung ~ Drehmoment

7.4 Drehmoment und Winkelbeschleunigung

$$\dot{\omega} \sim M$$

Winkelbeschleunigung ~ Drehmoment

Beschleunigende Kraft auf Δ*m*$_i$:

$$F_i = \Delta m_i \cdot a_i$$
$$= \Delta m_i \cdot r_i \cdot \dot{\omega}$$

7.4 Drehmoment und Winkelbeschleunigung

$$\dot{\omega} \sim M$$

Winkelbeschleunigung ~ Drehmoment

Beschleunigende Kraft auf Δ*m*$_i$:

$$F_i = \Delta m_i \cdot a_i$$
$$= \Delta m_i \cdot r_i \cdot \dot{\omega}$$

Erforderliches Drehmoment:

$$M_i = F_i \cdot r_i = \Delta m_i \cdot r_i^2 \cdot \dot{\omega}$$

7.4 Drehmoment und Winkelbeschleunigung

$$\dot{\omega} \sim M$$

Winkelbeschleunigung ~ Drehmoment

Beschleunigende Kraft auf Δm_i:

$$F_i = \Delta m_i \cdot a_i$$
$$= \Delta m_i \cdot r_i \cdot \dot{\omega}$$

Erforderliches Drehmoment:

$$M_i = F_i \cdot r_i = \Delta m_i \cdot r_i^2 \cdot \dot{\omega}$$

Für den ganzen Körper:

$$M = \sum M_i \quad = \sum \left(\Delta m_i \cdot r_i^2\right) \cdot \dot{\omega}$$

7.4 Drehmoment und Winkelbeschleunigung

Für den ganzen Körper:

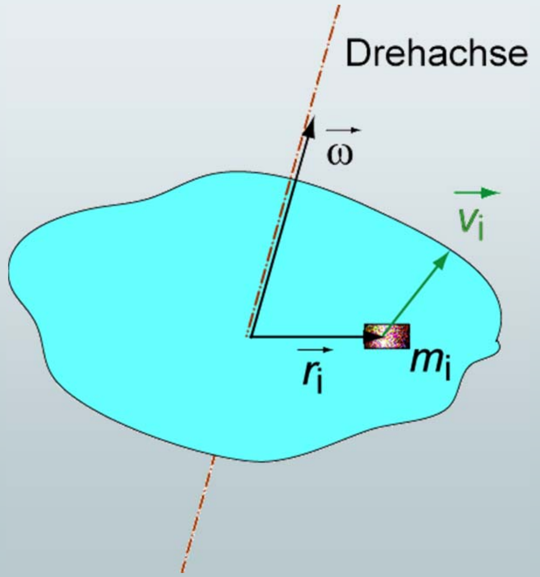
$$M = \sum M_i \quad = \sum \left(\Delta m_i \cdot r_i^2\right) \cdot \dot{\omega}$$

allg.:

$$M \quad = \underbrace{\int_V r^2 \cdot dm}_{I} \cdot \dot{\omega}$$

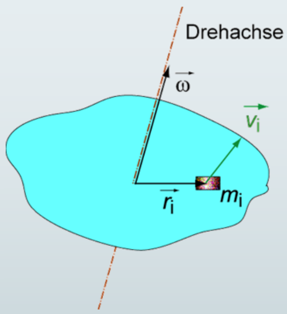
$$\boxed{\vec{M} = I \cdot \dot{\vec{\omega}}}$$

7.5 Drehimpuls



Impuls eines Massenelements m_i:

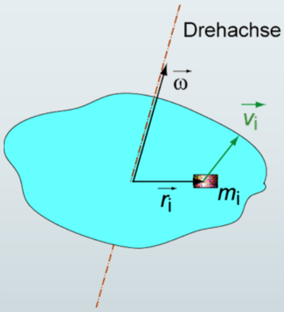
$$\vec{p}_i = m_i \cdot \vec{v}_i$$



7.5 Drehimpuls

Impuls eines Massenelements m_i:

$$\vec{p}_i = m_i \cdot \vec{v}_i$$



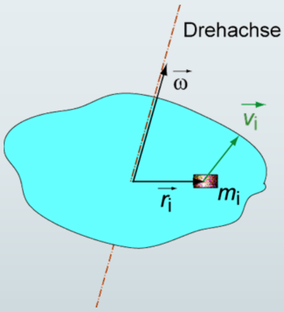
Definition: Drehimpuls

$$\vec{L} = \sum_i \vec{r}_i \times \vec{p}_i$$
$$= \sum_i m_i \cdot \vec{r}_i \times \vec{v}_i$$
$$= \sum_i m_i \cdot r_i^2 \cdot \vec{\omega}$$

7.5 Drehimpuls

Impuls eines Massenelements m_i:

$$\vec{p}_i = m_i \cdot \vec{v}_i$$



Definition: Drehimpuls

$$\vec{L} = \sum_i \vec{r}_i \times \vec{p}_i$$
$$= \sum_i m_i \cdot \vec{r}_i \times \vec{v}_i$$
$$= \sum_i m_i \cdot r_i^2 \cdot \vec{\omega}$$

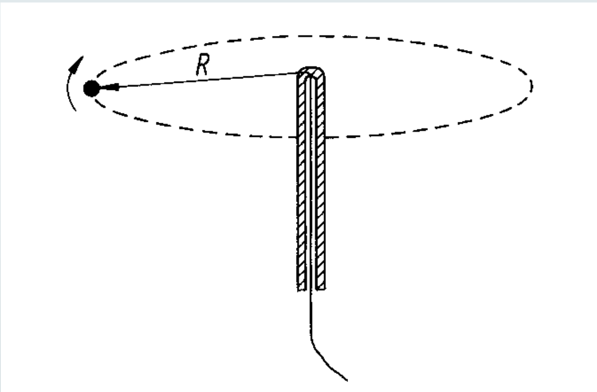
$$\boxed{\vec{L} = I \cdot \vec{\omega}}$$

Drehimpuls

$$\vec{L} = \sum_i \vec{r}_i \times \vec{p}_i$$

$$\vec{L} = I \cdot \vec{\omega}$$

- **Einheit:** $[L] = \frac{\text{kg} \cdot \text{m}^2}{\text{s}} = \text{Nm} \cdot \text{s} = \text{J} \cdot \text{s};$ **(Einheit einer Wirkung)**
- **Richtung:** $\vec{L} \perp \vec{r}, \vec{v}$



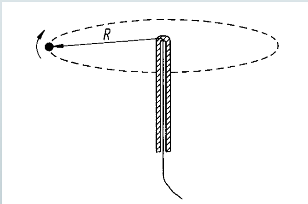
Versuch

7.5 Drehimpuls

Drehmoment und Drehimplusänderung

mit $\vec{M} = I \cdot \dot{\vec{\omega}}$

$$\vec{M} = \frac{d}{dt}\vec{L} = \dot{\vec{L}}$$



Andererseits:
Wenn kein Drehmoment wirkt, bleibt der Drehimpuls erhalten

Versuch

7.5 Drehimpuls

Translation	Rotation
Geschwindigkeit v	
Masse m	
Translationsenergie $E_{kin} = \frac{1}{2}mv^2$	
Kraft $\vec{F}$ $\vec{F} = m\vec{a}$	
Impuls $\vec{p}$ $\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt}$ $\vec{p} = m \cdot \vec{v}$	

7.5 Drehimpuls

Translation		Rotation	
Geschwindigkeit	v	**Winkelgeschwindigkeit**	ω
Masse	m		
Translationsenergie	$E_{kin} = \frac{1}{2}mv^2$		
Kraft	$\vec{F}$ $\vec{F} = m\vec{a}$		
Impuls	$\vec{p}$ $\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt}$ $\vec{p} = m \cdot \vec{v}$		

7.5 Drehimpuls

Translation		Rotation	
Geschwindigkeit	v	**Winkelgeschwindigkeit**	ω
Masse	m	**Trägheitsmoment**	I
Translationsenergie	$E_{kin} = \frac{1}{2}mv^2$		
Kraft	$\vec{F}$ $\vec{F} = m\vec{a}$		
Impuls	$\vec{p}$ $\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt}$ $\vec{p} = m \cdot \vec{v}$		

7.5 Drehimpuls

Translation		Rotation	
Geschwindigkeit	v	**Winkelgeschwindigkeit**	ω
Masse	m	**Trägheitsmoment**	I
Translationsenergie	$E_{kin} = \frac{1}{2} m v^2$	**Rotationsenergie**	$E_{rot} = \frac{1}{2} I \omega^2$
Kraft	$\vec{F}$ $\vec{F} = m\vec{a}$		
Impuls	$\vec{p}$ $\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt}$ $\vec{p} = m \cdot \vec{v}$		

7.5 Drehimpuls

Translation		Rotation	
Geschwindigkeit	v	**Winkelgeschwindigkeit**	ω
Masse	m	**Trägheitsmoment**	I
Translationsenergie	$E_{kin} = \frac{1}{2} m v^2$	**Rotationsenergie**	$E_{rot} = \frac{1}{2} I \omega^2$
Kraft	$\vec{F}$ $\vec{F} = m\vec{a}$	**Drehmoment**	$\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F}$ $\vec{M} = I \cdot \dot{\vec{\omega}}$
Impuls	$\vec{p}$ $\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt}$ $\vec{p} = m \cdot \vec{v}$		

7.5 Drehimpuls

Translation		Rotation	
Geschwindigkeit	v	**Winkelgeschwindigkeit**	ω
Masse	m	**Trägheitsmoment**	I
Translationsenergie	$E_{kin} = \frac{1}{2} m v^2$	**Rotationsenergie**	$E_{rot} = \frac{1}{2} I \omega^2$
Kraft	$\vec{F}$ $\vec{F} = m\vec{a}$	**Drehmoment**	$\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F}$ $\vec{M} = I \cdot \dot{\vec{\omega}}$
Impuls	$\vec{p}$ $\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt}$ $\vec{p} = m \cdot \vec{v}$	**Drehimpuls**	$\vec{L}$ $\vec{M} = \frac{d\vec{L}}{dt}$ $\vec{L} = I \cdot \vec{\omega} = \vec{r} \times \vec{p}$

R. Girwidz 45

7.5 Drehimpuls

Translation		Rotation	
Geschwindigkeit	v	**Winkelgeschwindigkeit**	ω
Masse	m	**Trägheitsmoment**	I
Translationsenergie	$E_{kin} = \frac{1}{2} m v^2$	**Rotationsenergie**	$E_{rot} = \frac{1}{2} I \omega^2$
Kraft	$\vec{F}$ $\vec{F} = m\vec{a}$	**Drehmoment**	$\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F}$ $\vec{M} = I \cdot \dot{\vec{\omega}}$
Impuls	$\vec{p}$ $\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt}$ $\vec{p} = m \cdot \vec{v}$	**Drehimpuls**	$\vec{L}$ $\vec{M} = \frac{d\vec{L}}{dt}$ $\vec{L} = I \cdot \vec{\omega} = \vec{r} \times \vec{p}$
$E_{kin} = \frac{p^2}{2m}$		$E_{rot} = \frac{L^2}{2I}$	

R. Girwidz 46

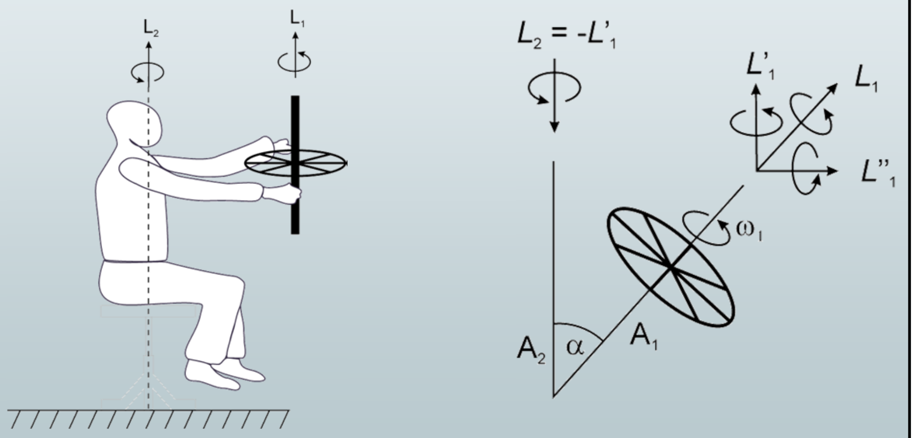
für Zentralkräfte:

$$\vec{M} = \vec{0} \text{ da } \vec{F} \,||\, \vec{r}$$

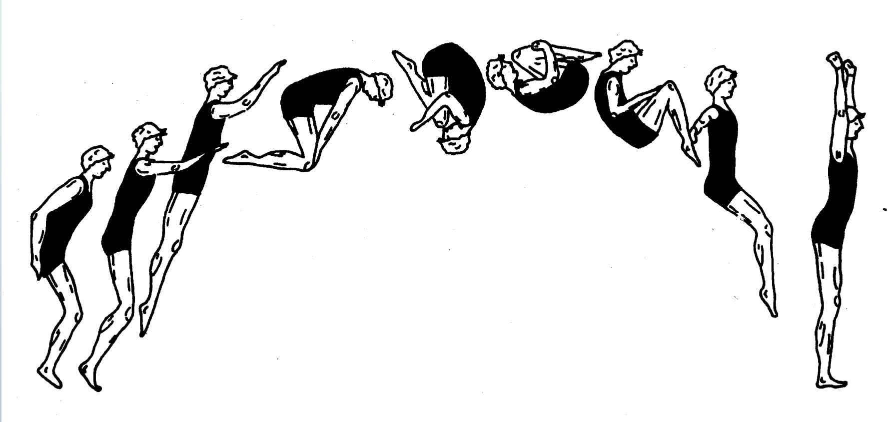
$$\Rightarrow \vec{L} = konst.$$

➤ Drehschemel

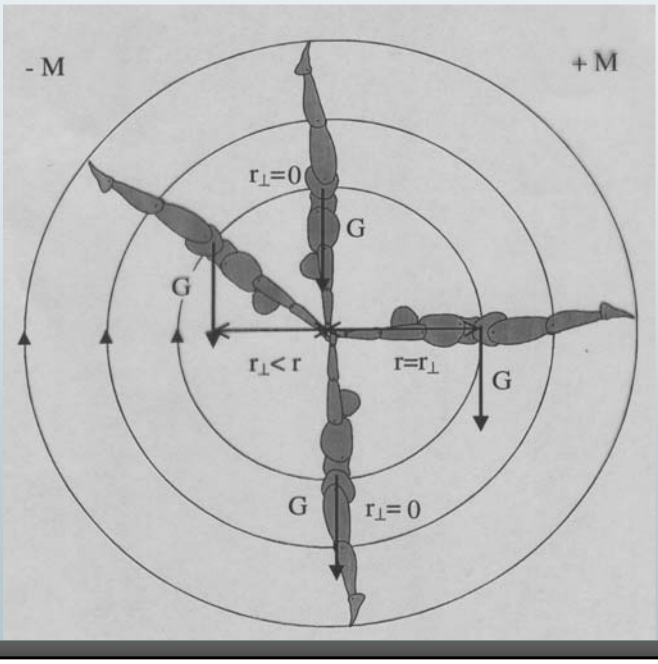
Der Drehimpuls ist ein Vektor!



7.5 Drehimpuls

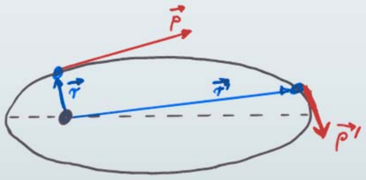


7.5 Drehimpuls



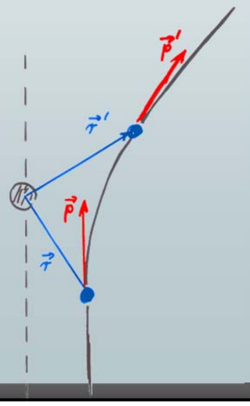
Definition des Drehimpulses ist nicht an Kreisbahn gebunden!

z. B. Ellipsenbahn



$$\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p}$$

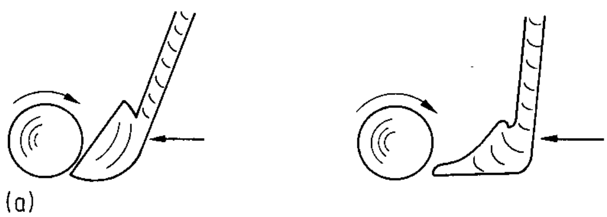
z. B. Hyperbelbahn

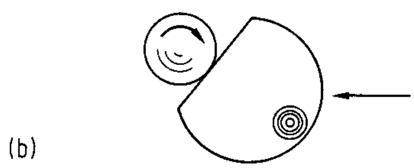


$$\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p}$$

➤ Zuwurf mit Stoßparameter

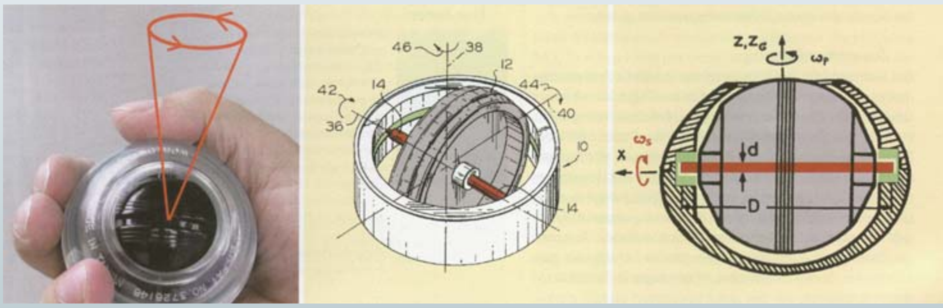
Magnus-Effekt beim Golfspiel.





(a) Rotationsachse des Balles horizontal (Seitenansicht);
(b) vertikal (Draufsicht).

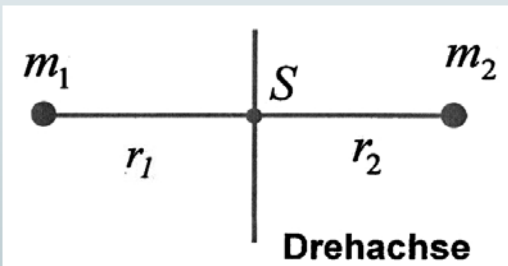
7.5 Drehimpuls



7.6 Berechnung von Trägheitsmomenten

Einfache Beispiele zur Berechnung von Trägheitsmomenten:

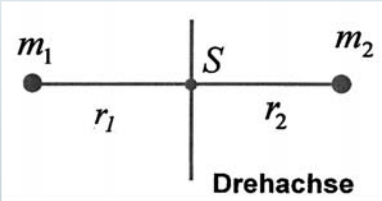
a) Zweiatomiges Molekül



$$I_A = m_1 \cdot r_1^2 + m_2 \cdot r_2^2$$

Einfache Beispiele zur Berechnung von Trägheitsmomenten:

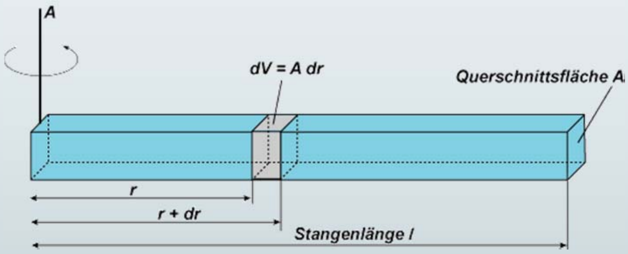
a) Zweiatomiges Molekül



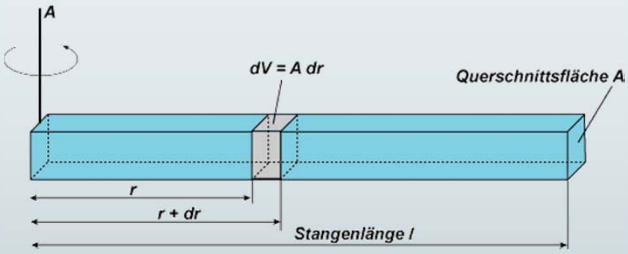
- Trägheitsmoment bezüglich Molekülachse sehr klein
- Molekülphysik beobachtet Rotationsspektren und bestimmt *I*

7.6 Berechnung von Trägheitsmomenten

b) Homogene dünne Stange (Achse am Ende)



b) Homogene dünne Stange (Achse am Ende)



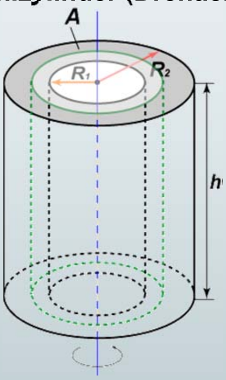
$$I = \int_K r^2 \cdot dm = \rho \int_K r^2 \cdot dV = \frac{m}{V} \int_0^l r^2 A \cdot dr =$$

$$\frac{m}{A \cdot l} \int_0^l r^2 A \cdot dr = \frac{m}{l} \int_0^l r^2 \cdot dr = \frac{m}{l} \left[\frac{r^3}{3} \right]_0^l =$$

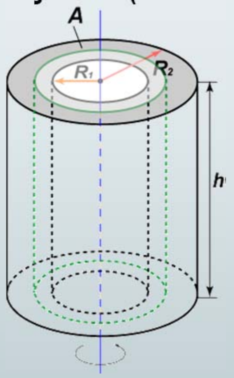
$$\underline{\underline{\frac{1}{3} m \cdot l^2}}$$

7.6 Berechnung von Trägheitsmomenten

c) Hohlzylinder (Drehachse = Mittelachse)



c) Hohlzylinder (Drehachse = Mittelachse)



Masse m; Radien R_1, R_2

Man zerlegt zur einfachen Berechnung den Hohlzylinder in dünne Röhren der Dicke dr (Radius r, Höhe h) mit dem Volumenelement dV = $2\pi r$ dr h

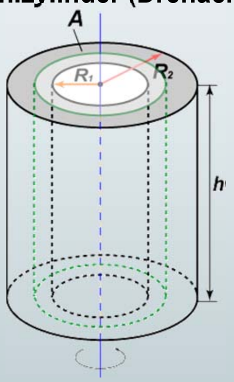
Volumen V des Hohlzylinders: $V = h\,\pi\,(R_2^2 - R_1^2)$

$$I = \frac{m}{V}\int_K r^2 dV = \frac{m}{V}\int_{R_1}^{R_2} hr^2 2\pi r \cdot dr$$

$$I = \frac{m}{V}2\pi h\int_{R_1}^{R_2} r^3 dr = \frac{m}{V}2\pi h\left[\frac{r^4}{4}\right]_{R_1}^{R_2} = \frac{m2\pi h\left(R_2^4 - R_1^4\right)}{4\pi h\left(R_2^2 - R_1^2\right)} = \frac{m}{2}\frac{\left(R_2^2 - R_1^2\right)\left(R_2^2 + R_1^2\right)}{\left(R_2^2 - R_1^2\right)};$$

$$\Rightarrow I = \frac{m}{2}\left(R_2^2 + R_1^2\right);$$

c) Hohlzylinder (Drehachse = Mittelachse)



$$I = \frac{m}{2}\left(R_2^2 + R_1^2\right)$$

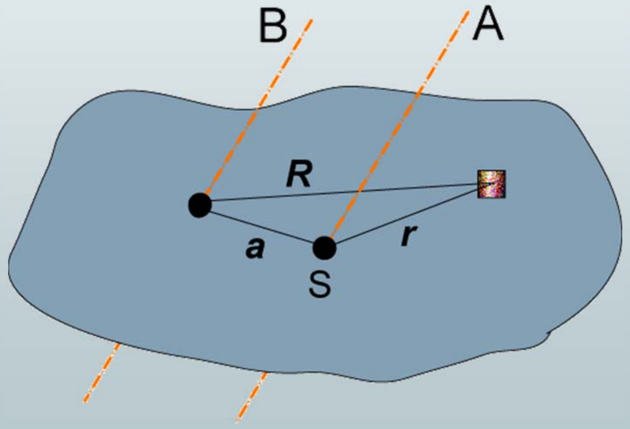
dünnwandig: $R_1 \approx R_2$ => $I = m\,R^2$;

Vollzylinder: $R_1 = 0$ => $I = 1/2\ m\,R^2$;

Versuch

d) Steinerscher Satz

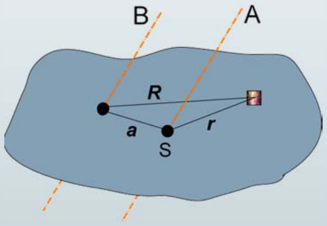
- Wenn die Rotationsachse nicht durch den Schwerpunkt geht



7.6 Berechnung von Trägheitsmomenten

d) Steinerscher Satz

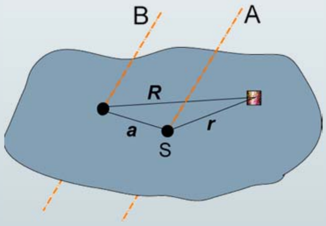
- Wenn die Rotationsachse nicht durch den Schwerpunkt geht



7.6 Berechnung von Trägheitsmomenten

d) Steinerscher Satz

- Wenn die Rotationsachse nicht durch den Schwerpunkt geht



$$E_{kin} = \frac{1}{2} m v_s^2 + \frac{1}{2} I_s \omega^2;$$

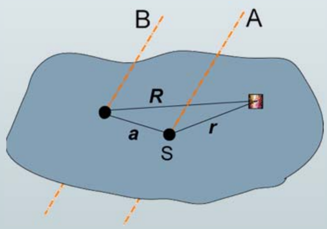
$$= \frac{1}{2} m a^2 \omega^2 + \frac{1}{2} I_s \omega^2;$$

$$= \frac{1}{2} \underbrace{(m a^2 + I_s)}_{I_B} \omega^2;$$

7.6 Berechnung von Trägheitsmomenten

d) Steinerscher Satz

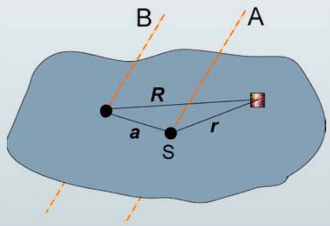
- Wenn die Rotationsachse nicht durch den Schwerpunkt geht



$$\Rightarrow I_B = a^2 \cdot m + I_A$$

d) Steinerscher Satz

- Wenn die Rotationsachse nicht durch den Schwerpunkt geht



$$I_A = \int_V r^2 \cdot dm\,;$$

$$I_B = \int_V R^2 \cdot dm\,;$$

$$= \int_V \left(\vec{a} + \vec{r}\right)^2 dm\,;$$

$$= \int_V a^2 dm + \int_V r^2 dm + 2\underbrace{\int_V \vec{a}\cdot\vec{r}\cdot dm}_{\mathbf{0}}$$

$$\vec{R}^2 = \left(\vec{a} + \vec{r}\right)^2$$

$$\int \vec{a}\cdot\vec{r}\cdot dm = \int a \cdot x \cdot dm$$

$$= a\int x \cdot dm$$

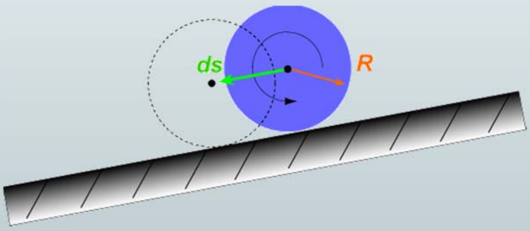
$$= 0 \text{ (Schwerpktsatz)}$$

$$\Rightarrow I_B = a^2 \cdot m + I_A$$

Steinerscher Satz:

Das Trägheitsmoment eines Körpers bei Rotation um eine beliebige Achse B ist gleich dem Trägheitsmoment des Körpers um eine zu B parallele Achse durch den Schwerpunkt plus das Trägheitsmoment des Schwerpunkts.

- **Rollender Zylinder auf schiefer Ebene**
  - **Geschwindigkeit und Winkelgeschwindigkeit hängen zusammen**



$$ds = R \cdot d\varphi;$$

$$\frac{ds}{dt} = R \cdot \frac{d\varphi}{dt};$$

$$v_S = R \cdot \omega;$$

- **Rollender Zylinder auf schiefer Ebene**
  - **Energiebetrachtung**

$$E_{pot} = mgh \qquad \text{(beim Start)}$$

$$E_{kin} = \underbrace{\frac{1}{2} m v_h^2}_{\text{Translations-energie}} + \underbrace{\frac{1}{2} I_S \omega_h^2}_{\text{Rotations-energie}} \qquad \text{(am Ziel)}$$

$$\Rightarrow v_h^2 = \frac{2gh}{1 + I_s / mR^2}$$

7.6 Berechnung von Trägheitsmomenten

$$v_h^{\,2} = \frac{2gh}{1 + \frac{I_s}{mR^2}}$$

homogener Vollzylinder:

$$I_S = \frac{1}{2} mR^2 \quad \Rightarrow \quad v_{sh}^{\,2} = \frac{4}{3} gh$$

dünnwandiger Hohlzylinder:

$$I_S = mR^2 \quad \Rightarrow \quad v_{sh}^{\,2} = gh$$

7.7 Präzession

- **Ein starrer Körper, der sich ohne Einschränkung um einen festen Punkt drehen kann heißt Kreisel**

- **Wirkt auf einen rotierenden Kreisel ein Drehmoment so gilt:**

$$\vec{M} = \frac{d\vec{L}}{dt}$$

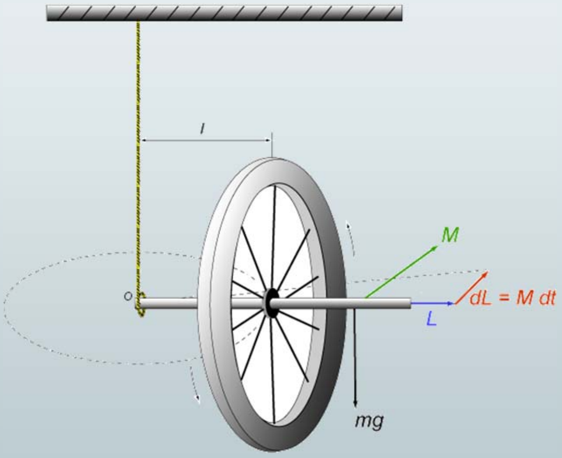
> **Rad aufgehängt an einer Schnur**

- **Besonders „attraktiver" Spezialfall:**
  - **der Körper rotiert um die Figurenachse, d. h.** $(\vec{L} \,||\, Fig.achse)$
  - **und** $\vec{M} \perp \vec{L}$

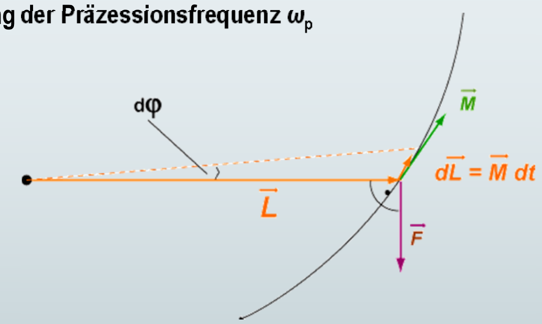
$\Rightarrow$ **Der Betrag von *L* bleibt konstant, aber die Richtung ändert sich (und damit die Richtung der Figurenachse).**

=> Der Körper beschreibt eine Präzessionsbewegung

Berechnung der Präzessionsfrequenz ω_p



Berechnung der Präzessionsfrequenz ω_p



$$d\varphi = \frac{dL}{L} = \frac{M \cdot dt}{L} = \frac{m \cdot g \cdot l \cdot dt}{L}$$

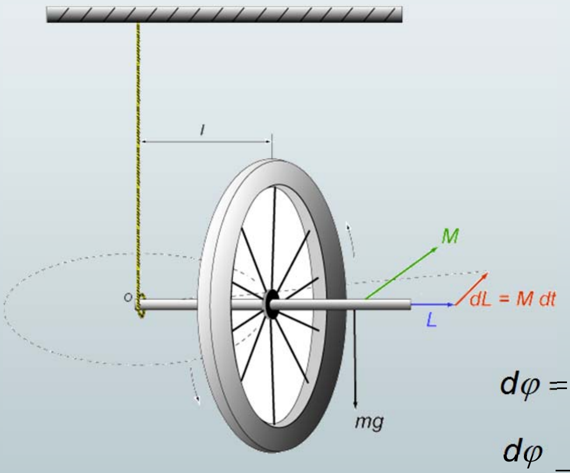
$$\frac{d\varphi}{dt} = \omega_p = \frac{m \cdot g \cdot l}{L}$$

$\uparrow$

Präzessionsfrequenz

7.7 Präzession

Berechnung der Präzessionsfrequenz ω_p



$$d\varphi = \frac{dL}{L} = \frac{M \cdot dt}{L} = \frac{m \cdot g \cdot l \cdot dt}{L}$$

$$\frac{d\varphi}{dt} = \omega_p = \frac{m \cdot g \cdot l}{L}$$

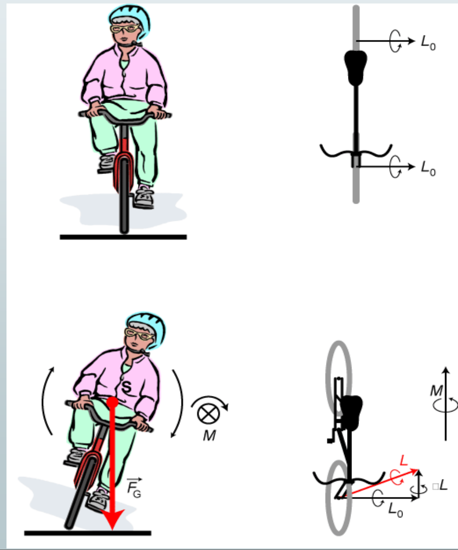
$\uparrow$

Präzessionsfrequenz

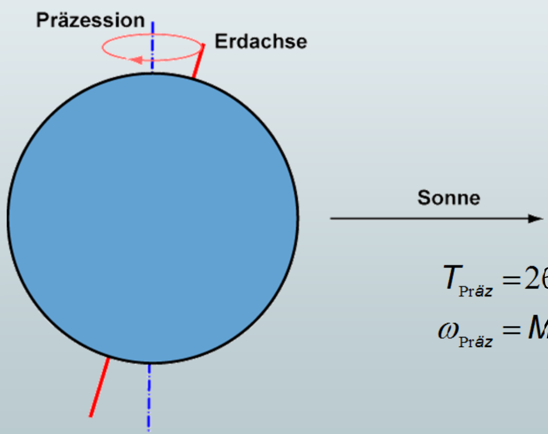
Versucht man, einen Kreisel durch ein Drehmoment zu kippen, so weicht die Kreiselachse senkrecht zur angreifenden Kraft aus.

Beispiel Fahrradfahren:

Drehimpuls und Drehmoment beim Lenken



Präzession der Erde

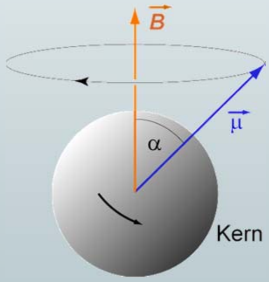


$$T_{\text{Präz}} = 26000\,\text{a};$$
$$\omega_{\text{Präz}} = M/L = 2\pi/T_{\text{Präz}};$$

7.7 Präzession

Zur Kernspinresonanz

Auch im mikroskopischen Bereich kann man Präzessionsbewegungen beobachten. Atome, Atomkerne und Moleküle mit Eigendrehimpuls besitzen oft ein magnetisches Moment. Bringt man sie in ein äußeres Magnetfeld, so entsteht ein Drehmoment und die Drehimpulsachse präzediert mit eine charakteristischen Resonanzfrequenz um das Magnetfeld.



Drehmoment $\vec{M} = \vec{\mu} \times \vec{B}$

$\vec{\mu}$: magn. Moment

$\vec{B}$: magn. Kraftflußdichte

Mit der Kernspinresonanz (nuclear magnetic resonance NMR) weist man Atome und ihren speziellen chemischen Bindungszustand nach. In der Medizin sind Diagnosen mit Hilfe von NMR-Computer-Tomographen möglich.

➤ **Film u. Dias von Haase**

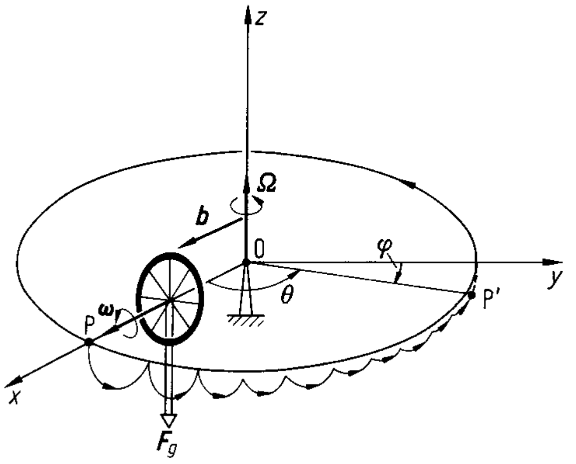
7.7 Präzession

Nutation

➤ **Versuch**

7.7 Präzession

Nutation



Nutationsbewegung eines Kreisels.

Nutation: Drehimpulsrichtung deckt sich nicht mit der Figurenachse

7.8 Hauptträgheitsachsen

> Fotos, Versuche (Lassowerfer)

- Um Hauptträgheitsachsen / freie Achsen drehen Körper ohne Unwucht, d. h. die Lager werden nicht durch Kräfte belastet.
- Hauptträgheitsachsen gehen durch den Schwerpunkt.
- Jeder Körper hat 3 Hauptträgheitsachsen, die senkrecht aufeinander stehen.
- Stabil drehen Körper nur um die Hauptträgheitsachsen mit dem größten und dem kleinsten Trägheitsmoment.