9.1 Überblick

Schwingung := zeitlich periodischer Vorgang
mit periodischer Umwandlung verschiedener Energieformen

Beispiele:
- Federpendel
- Massenpendel (math. Pendel)
- Torsionspendel (Drehpendel)
- Stabschwingungen (Eigenschw.)
- Schwingungen von Luftsäulen
- elektrischer Schwingkreis
- Molekülschwingungen
- Kristallgitterschwingungen
- elektromagnetische Schwingungen

Begriffe

Frequenz: (Eigenfrequenz) — f Zahl der Schwingungen pro Zeiteinheit; $[f]= s^{-1}$;

Schwingungsdauer: Periodendauer — $T = 1 / f$;

Kreisfrequenz: — $\omega := 2\pi f = 2\pi/T$

Amplitude: — Betrag der maximalen Auslenkung der schwingenden physikalischen Größe

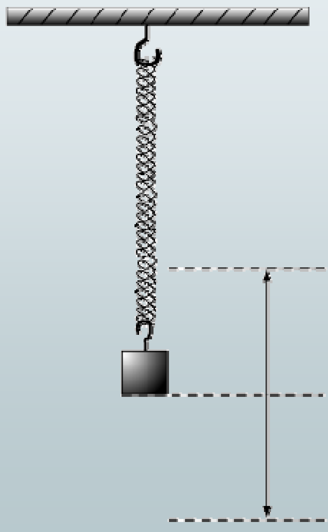
9. Schwingungen

- **Einteilung**

Freie Schwingung:	Schwingung ohne äußere Einwirkung mit der Eigenfrequenz
Gedämpfte Schwingung:	Schwingung mit Amplitudenabnahme infolge einer Dämpfung (Reibung)
Erzwungene Schwingung:	Schwingung unter Einwirkung äußerer periodischer Anregung

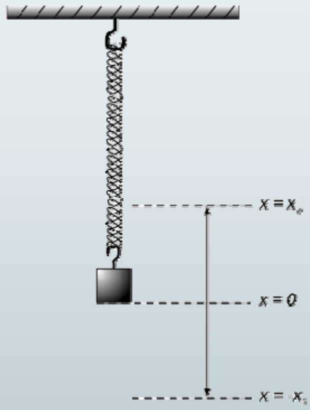
9.2 Freie, ungedämpfte Schwingung

a) Federschwingung



9.2 Freie, ungedämpfte Schwingung

a) Federschwingung



Rücktreibende Kraft: $F_R = -D \cdot \vec{x}$

Trägheitskraft: $F_{Tr} = m \cdot \ddot{\vec{x}}$

$$\left.\begin{array}{l} F_R = -D \cdot \vec{x} \\ F_{Tr} = m \cdot \ddot{\vec{x}} \end{array}\right\} \; m\ddot{\vec{x}} = -D \cdot x$$

$$\underline{\underline{m\ddot{\vec{x}} + D \cdot x = 0}}$$

9.2 Freie, ungedämpfte Schwingung

Rechnung:

9.2 Freie, ungedämpfte Schwingung

Rechnung:

Dgl.: $\ddot{x} + \frac{D}{m} \cdot x = 0;$ (*)

Ansatz: $x(t) = -x_0 \cdot \cos(\omega_0 \cdot t + \varphi);$ (**)

$$v(t) = -\omega_0 \cdot x_0 \cdot \sin(\omega_0 \cdot t + \varphi);$$
$$a(t) = -\omega_0^2 \cdot x_0 \cdot \cos(\omega_0 \cdot t + \varphi)$$
$$= -\omega_0^2 \cdot x(t);$$

in (*) $-\omega_0^2 \cdot x + \frac{D}{m} x = 0$

(**) ist Lösung wenn: $\omega_0 = +\sqrt{\frac{D}{m}};$

9.2 Freie, ungedämpfte Schwingung

Ergebnis: "harmonischer Oszillator" (nur <u>eine</u> Frequenz)

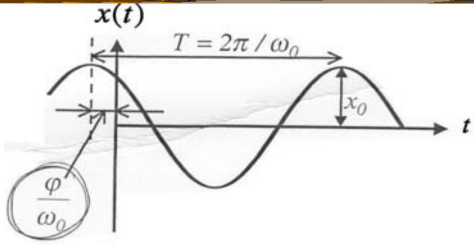
$$x(t) = \underbrace{x_0}_{\text{Amplitude}} \cdot \cos(\underbrace{\omega_0}_{\text{Schwingungs-frequenz}} \cdot t + \underbrace{\varphi}_{\text{Phasen-winkel}})$$

$$v(t) = -\omega_0 \cdot x_0 \cdot \sin(\omega_0 \cdot t + \varphi);$$
$$a(t) = -\omega_0^2 \cdot x_0 \cdot \cos(\omega_0 \cdot t + \varphi);$$

x_0, φ durch Anfangsbedingungen festgelegt

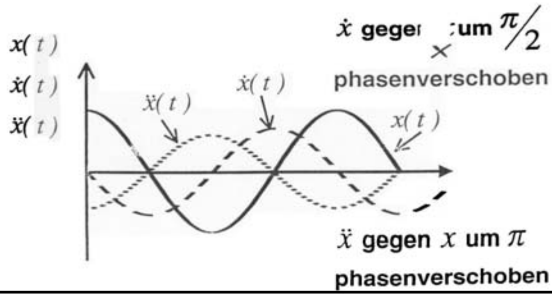
ω_0 unabhängig von Amplitude

9.2 Freie, ungedämpfte Schwingung



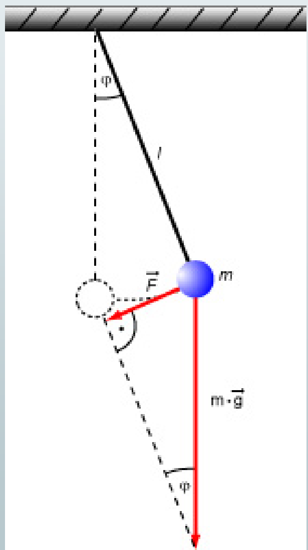
$T = \frac{1}{\nu}$ = Schwingungsdauer $[s]$

ν = Frequenz $[Hz]$



9.2 Freie, ungedämpfte Schwingung

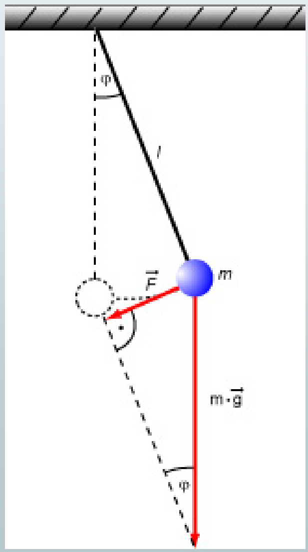
b) Mathematisches Pendel (Fadenpendel)



Rücktreibende (beschleunigende) Kraft *F* entlang dem Bogen

9.2 Freie, ungedämpfte Schwingung

b) Mathematisches Pendel (Fadenpendel)



Rücktreibende (beschleunigende) Kraft F entlang dem Bogen

$s = l \cdot \varphi$ (tangential):

$$\mathrm{F} = -\mathrm{m} \cdot \mathrm{g} \cdot \sin\varphi = \mathrm{m} \cdot \mathrm{a} = \mathrm{m} \cdot \frac{d^2 s}{dt^2}$$

$$\frac{d^2 s}{dt^2} \equiv l \cdot \frac{d^2 \varphi}{dt^2} \equiv l \ddot{\varphi}$$

$$\underline{\underline{\Rightarrow l \cdot \ddot{\varphi} + g \cdot \sin\varphi = 0}}$$

(Bewegungsgleichung)

9.2 Freie, ungedämpfte Schwingung

Einfache Lösung (bzw. <u>harmonische Schwingung</u>) nur für <u>kleine Winkel</u>auslenkungen!

$\sin\varphi \approx \varphi$ für $\varphi \leq 0{,}1\,\mathrm{rad}$ (5°)

Dann Lösung der Bewegungsgleichung:

9.2 Freie, ungedämpfte Schwingung

Einfache Lösung (bzw. harmonische Schwingung) nur für kleine Winkelauslenkungen!

$$\sin\varphi \approx \varphi \quad \text{für } \varphi \leq 0{,}1\text{rad} \quad (5°)$$

Dann Lösung der Bewegungsgleichung:

$$\ddot{\varphi} + (g/l)\cdot\varphi = 0:$$

$$\varphi = \varphi_0 \cdot \cos(\omega \cdot t + \psi)$$

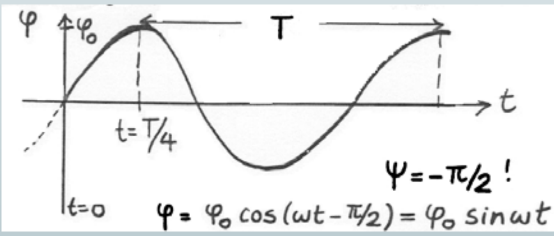
$$\omega = \sqrt{g/l};$$

$$T = 2\pi\sqrt{l/g} \approx 2\sqrt{l_{[m]}}s$$

9.2 Freie, ungedämpfte Schwingung

Schwingungsdauer unabhängig von m!

➤ V



Anwendungen:

- **Bestimmung der Fallbeschleunigung** g **möglich**
- **Sekundenpendel (Zwei-Sekunden-Pendel):**

9.2 Freie, ungedämpfte Schwingung

Anwendungen:

- **Bestimmung der Fallbeschleunigung** g **möglich**
- **Sekundenpendel (zwei Sekunden):**

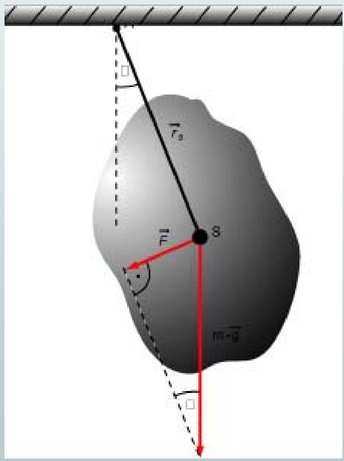
$$2\mathrm{s} = 2\pi\sqrt{\frac{l_s}{g}};$$

$$l_s = \left(\frac{2\mathrm{s}}{2\pi}\right)^2 \cdot g;$$

$$l_s = 0{,}994\,\mathrm{m};$$

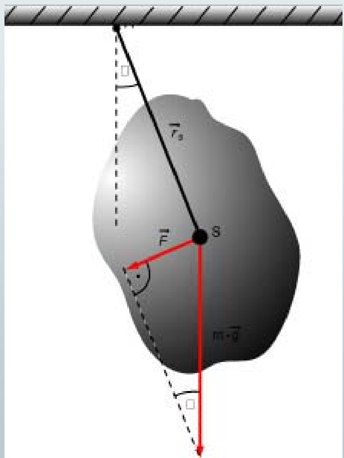
9.2 Freie, ungedämpfte Schwingung

c) Physikalisches Pendel



9.2 Freie, ungedämpfte Schwingung

c) Physikalisches Pendel

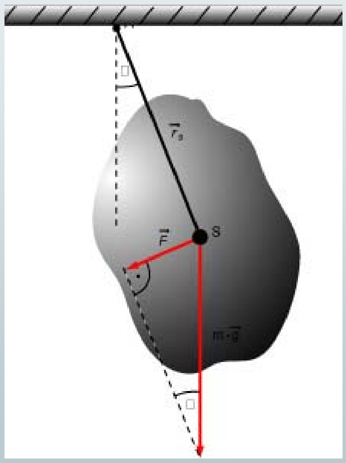


Rücktreibendes Drehmoment
(Drehung um Achse durch A)

Bewegungsgleichung:

9.2 Freie, ungedämpfte Schwingung

c) Physikalisches Pendel



Rücktreibendes Drehmoment (Drehung um Achse durch A)

$$\vec{M} = \vec{r}_s \times \vec{F}_G = \vec{r}_s \times \left(m\vec{g} \right)$$

$$\left| M \right| = m \cdot g \cdot r_s \cdot \sin\varphi$$

Bewegungsgleichung:

$$I_A \cdot \dot{\omega} = -m \cdot g \cdot r_s \cdot \sin\varphi$$

$$\underline{\underline{I_A \cdot \ddot{\varphi} + m \cdot g \cdot r_s \cdot \sin\varphi = 0}}$$

9.2 Freie, ungedämpfte Schwingung

Lösungen für kleine φ: $\sin\varphi \approx \varphi \quad (\varphi \leq 5°)$

9.2 Freie, ungedämpfte Schwingung

Lösungen für kleine $\varphi : \sin\varphi \approx \varphi \quad (\varphi \leq 5°)$

$$\ddot{\varphi} + \frac{m \cdot g \cdot r_s}{I_A} \cdot \varphi = 0 \;\rightarrow \omega = \sqrt{\frac{m \cdot g \cdot r_s}{I_A}}$$

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{I_A}{m \cdot g \cdot r_s}} = 2\pi \sqrt{\frac{m \cdot r_s^2 + I_s}{m \cdot g \cdot r_s}} \text{ (Satz von Steiner)}$$

vgl. math. Pendel: $T = 2\pi \sqrt{\frac{\ell_r}{g}}$

$\ell_r = \dfrac{I_A}{m \cdot r_s}$ **heißt allgemein <u>reduzierte Pendellänge</u> eines physikalischen Pendels (einem math. Pendel äquivalent)**

→ Reversionspendel

9.2 Freie, ungedämpfte Schwingung

$I_S = m \cdot K^2; \quad K = \text{Trägheitsradius};$

$$\Rightarrow T = 2\pi \sqrt{\frac{m \cdot r_s^2 \left(1 + K^2 / r_s^2\right)}{m \cdot g \cdot r_s}} = 2\pi \sqrt{\frac{r_s}{g}\left(1 + \frac{K^2}{r_s^2}\right)}$$

mathematisches Pendel: Punktmasse in SP

$K = 0, \quad r_s \equiv \ell:$

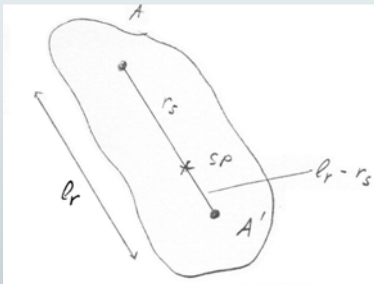
$T = 2\pi \sqrt{\frac{\ell}{g}}$; - unabhängig von m

$= r_s \left(1 + K^2 / r_s^2\right);$

9.2 Freie, ungedämpfte Schwingung

Reversionspendel

➤ V: Reversionspendel

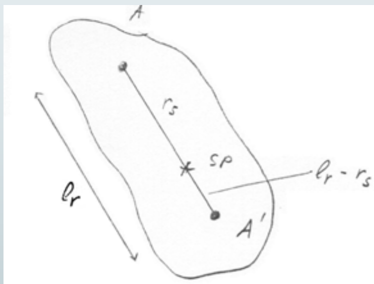


9.2 Freie, ungedämpfte Schwingung

Reversionspendel

➤ V: Reversionspendel

! gleiche Schwingungsdauer um A'!



2 Drehachsen A, A' im Abst. $\overline{AA'} = \ell_r$

ℓ_r : Reduzierte Pendellänge

$$T_A = 2\pi\sqrt{\frac{\ell_r}{g}} = 2\pi\sqrt{\frac{I_A}{m \cdot g \cdot r_s}}$$

$$\ell_r = \frac{I_A}{m \cdot r_s} = \frac{m \cdot r_s^2 + I_s}{m \cdot r_s} = r_s + \frac{I_s}{m \cdot r_s} \qquad (1)$$

! Satz von Steiner

Zu zeigen: $T_A = T_A' = 2\pi\sqrt{\frac{\ell_r}{g}}$

d.h. $\frac{I_A'}{m\cdot g\cdot(\ell_r - r_s)} = \frac{\ell_r}{g}$

$$\frac{I_A'}{m\cdot g\cdot(\ell_r - r_s)} = \frac{m(\ell_r - r_s)^2 + I_s}{m(\ell_r - r_s)\cdot g}$$

$$= \frac{\ell_r}{g} - \frac{r_s}{g} + \frac{I_s}{m(\ell_r - r_s)\cdot g}$$

mit (1)
$$= \frac{\ell_r}{g} - \frac{r_s}{g} + \frac{I_s}{m\left(r_s + \frac{I_s}{m\cdot r_s} - r_s\right)\cdot g}$$

$$= \frac{\ell_r}{g} - \frac{r_s}{g} + \frac{r_s}{g} = \frac{\ell_r}{g};$$ q.e.d.

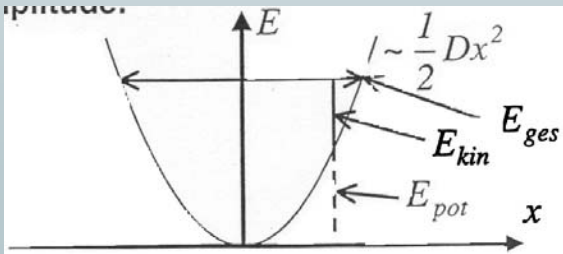
d) Energiebilanz bei der harmonische Schwingung

$$E_{ges} = E_{kin} + E_{pot}$$
$$= \frac{1}{2}D\cdot x^2 + \frac{1}{2}m\cdot v^2 = const$$

(*) Rechnung

$$E_{ges} = \frac{1}{2}D\cdot x_0^{\,2}$$

Energie proportional zum Quadrat der Amplitude!



9.2 Freie, ungedämpfte Schwingung

(*) Rechnung

9.2 Freie, ungedämpfte Schwingung

(*) Rechnung

$$x = x_0 \cdot \cos(\omega_0 \cdot t + \varphi)$$

$$\dot{x} = -x_0 \cdot \omega_0 \cdot \sin(\omega_0 \cdot t + \varphi)$$

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{D}{m}};$$

$$E_{Ges} = \frac{1}{2} D \cdot x^2 + \frac{1}{2} m \cdot v^2$$

$$= \frac{1}{2} D \cdot x_0^{\,2} \cdot \cos^2(\omega_0 \cdot t + \varphi) + \frac{1}{2} m \cdot x_0^{\,2} \cdot \omega_0^{\,2} \cdot \sin^2(\omega \cdot t + \varphi)$$

$$\longrightarrow \frac{D}{m}$$

$$= \frac{1}{2} D \cdot x_0^{\,2} \left\{ \cos^2(\omega_0 \cdot t + \varphi) + \sin^2(\omega_0 \cdot t + \varphi) \right\}$$

$$= \frac{1}{2} D \cdot x_0^{\,2}$$

9.2 Freie, ungedämpfte Schwingung

Federpendel ohne Dämpfung

$$x = x_0 \cos(\omega \cdot t + \psi); \qquad \omega = \sqrt{D/m}; \qquad (1)$$

$$T = 2\pi\sqrt{m/D};$$

Herleitung der Bewegungsgleichung aus dem Energiesatz:

$$\frac{m}{2}\cdot v_x^{\,2} + \frac{D}{2}\cdot x^2 = const = \frac{D}{2}\cdot x_0^{\,2}$$

$$\frac{d}{dt}\left[\frac{m}{2}\cdot v_x^{\,2} + \frac{D}{2}\cdot x^2\right] = \frac{d}{dt}[const] = 0$$

$$m \cdot v_x \cdot \frac{dv_x}{dt} + D \cdot x \cdot \frac{dx}{dt} = 0$$

$$v_x = \frac{\mathrm{dx}}{\mathrm{dt}} \qquad \frac{dv_x}{dt} = a = \frac{d^2x}{dt^2}$$

$$m \cdot \frac{d^2x}{dt^2} + D \cdot x = 0 \qquad \text{Bew. glg.! (2)}$$

mit Lösung (1)

9.2 Freie, ungedämpfte Schwingung

Zusammenfassung: (Freie, ungedämpfte Schwingung)

Federschwinger

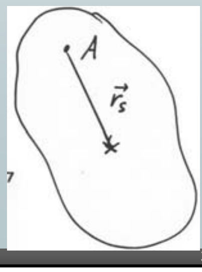
$$m \cdot \ddot{x} + D \cdot x = 0$$

$$x(t) = x_0 \cdot \cos(\omega_0 \cdot t + \varphi)\ ; \qquad \omega_0 = \sqrt{D/m};$$

Fadenpendel

$$\ell \cdot \ddot{\varphi} + g \cdot \sin\varphi = 0\ ; \qquad \omega_0 = \sqrt{\frac{g}{\ell}}; \quad T = 2\pi\sqrt{\frac{\ell}{g}};$$

Physikalisches Pendel



$$I_A \cdot \dot{\omega} = -m \cdot g \cdot r_s \cdot \sin\varphi$$

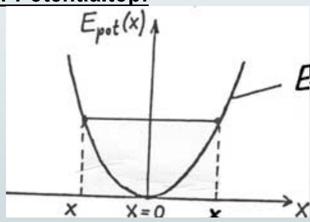
$$I_A \cdot \ddot{\varphi} + m \cdot g \cdot r_s \cdot \sin\varphi = 0$$

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{m \cdot g \cdot r_s}{I_A}} \quad ; \quad T = 2\pi\sqrt{\frac{I_A}{m \cdot g \cdot r_s}}$$

9.2 Freie, ungedämpfte Schwingung

Modell des harmonischen Oszillators

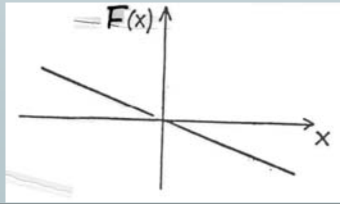
parabelförmiger Potentialtopf



$$E_{pot}(x) = \frac{1}{2} D \cdot x^2$$

Gleichgewichtslage ➔ Minimum der pot. Energie

elast. Rückstellkraft prop. Auslenkung



$$F(x) = -D \cdot x$$

$$= -\frac{d}{dx} \cdot E_{pot}(x)$$

9.2 Freie, ungedämpfte Schwingung

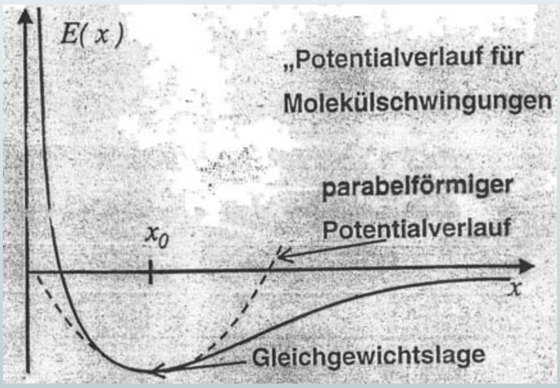
harmonische Schwingung um Gleichgewichtslage

$$\ddot{x} + \omega^2 \cdot x = 0; \qquad \text{mit } \omega^2 = D/m;$$

$$x(t) = x_0 \cdot \cos(\omega \cdot t + \psi)$$

Kreisfrequenz $\omega = 2\pi \cdot \nu = \sqrt{D/m}$

9.2 Freie, ungedämpfte Schwingung



„Potentialverlauf für Molekülschwingungen

parabelförmiger Potentialverlauf

Gleichgewichtslage

In der Nähe der Gleichgewichtslage ist Schwingung „harmonisch“

9.2 Freie, ungedämpfte Schwingung

Federschwingung ist ein „gutes“ Modell für viele physikalische Überlegungen:

- Molekülschwingungen
- Schwingungen von Festkörpern, etc.

i. A. gilt für die Energie aber nicht exakt: $E \sim x_0^2$
(nur "in guter Näherung" in der Nähe des Gleichgewichtes)

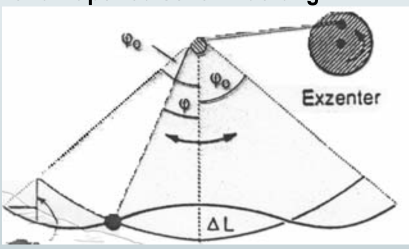
e) Das Torsionspendel

(T. S. 399)

9.2 Freie, ungedämpfte Schwingung

Parametrischer Oszillator

erfährt periodische Änderung



Parametrischer Oszillator als Fadenpendel mit periodisch variierter Fadenlänge

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \omega_0{}^2 \cdot x = 0$$

$$\ddot{x} + \omega^2(t) \cdot x = 0$$

$$\omega^2(t) = \omega_0{}^2\left(1 + h \cdot \cos(\Omega \cdot t)\right)$$

$$h = \frac{2(\omega - \omega_0)}{\omega_0} << 1$$

$$\Rightarrow \ddot{x} + \omega_0{}^2 \cdot [1 + h \cdot \cos(\Omega \cdot t)] \cdot x = 0$$

Mathieusche Diff. Gleichung