

LMU LUDWIG-MAXIMILIANS-UNIVERSITÄT MÜNCHEN

5. Teilchensysteme und Impulserhaltung

5.1 Massenmittelpunkt

5.2 Impuls als Bewegungsgröße

5.3 Impulserhaltungssatz

5.4 Stoßprozesse

5.5 Raketenphysik

R. Girwidz 1

LMU LUDWIG-MAXIMILIANS-UNIVERSITÄT MÜNCHEN

5.1 Massenmittelpunkt

Spezialfall 1 dim. Welt:

V: 2 Wagen auf Balken

The diagram shows a horizontal line representing a beam. On the left end, there is a vertical tick mark labeled '0'. A larger black dot representing mass m_1 is positioned at a point labeled x_1 below the line. A smaller black dot representing mass m_2 is positioned at a point labeled x_2 below the line. A small 'x' is located on the line between x_1 and x_2 , with the label x_S below it.

R. Girwidz 2

LMU LUDWIG-MAXIMILIANS-UNIVERSITÄT MÜNCHEN 5.1 Massenmittelpunkt

Allgemein:

$$m_{Ges} \cdot \vec{r}_s = \sum_i m_i \vec{r}_i$$

$$\vec{r}_s = \frac{\sum_i m_i \vec{r}_i}{\sum_i m_i}$$

The diagram illustrates a system of three particles with masses m_1 , m_2 , and m_i . Each particle is represented by a black dot. Position vectors \vec{r}_1 , \vec{r}_2 , and \vec{r}_i are shown as yellow arrows originating from a common origin 0 and pointing to the respective particles. A green dot labeled x_s represents the center of mass. The overall center of mass position vector \vec{r}_s is also indicated.

R. Girwidz 3

LMU LUDWIG-MAXIMILIANS-UNIVERSITÄT MÜNCHEN 5.1 Massenmittelpunkt

V: Schraubenschlüssel mit Markierung
Vergleich mit Ball

Trägheitssatz und Newton II für ein System von Teilchen:

Der Massenmittelpunkt eines Systems bewegt sich unter dem Einfluss einer resultierenden äußeren Kraft wie ein Teilchen mit der Masse:

$$(m_{Ges} = \sum_i m_i)$$

R. Girwidz 4

LMU	LUDWIG- MAXIMILIANS- UNIVERSITÄT MÜNCHEN	5.1 Massenmittelpunkt	
			V: Schraubenschlüssel mit Markierung Vergleich mit Ball
<p>Trägheitssatz und Newton II für ein System von Teilchen:</p> <p style="color: blue;">Der Massenmittelpunkt eines Systems bewegt sich unter dem Einfluss einer resultierenden äußeren Kraft wie ein Teilchen mit der Masse:</p> $(m_{\text{Ges}} = \sum_i m_i)$ <p>Spezialfall: $\vec{F} = 0; \Rightarrow \vec{v}_{\text{Schwerpunkt}} = \textit{konst};$ (d. h. der Massenmittelpunkt bewegt sich geradlinig gleichförmig oder ruht)</p>			
R. Girwidz			5

LMU	LUDWIG- MAXIMILIANS- UNIVERSITÄT MÜNCHEN	5.2 Impuls als Bewegungsgröße	
<p>Def.: $\vec{p} = m \cdot \vec{v}$</p> <hr style="border: 0.5px solid black; margin: 10px 0;"/> <div style="display: flex; justify-content: space-around; align-items: center;"> <div style="text-align: center;"> $F_{\text{ext}} = m_{\text{Ges}} \cdot a_{\text{sp}}$ $F_{\text{ext}} = m_{\text{Ges}} \cdot \dot{v}_{\text{sp}}$ </div> <div style="text-align: center;"> allg. : $\vec{F} = \frac{d}{dt}(m \cdot \vec{v}) = \dot{\vec{p}}$ </div> </div> <p>Mit Hilfe des Impulses lässt sich die Grundgleichung der Mechanik allgemein formulieren:</p>			
R. Girwidz			6



$$\vec{F} = \dot{\vec{p}}$$

$$\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt} \rightarrow \begin{array}{l} \vec{F}dt = d\vec{p} \\ \vec{F}\Delta t = \Delta\vec{p} \end{array}$$



Aussagen ablesen können

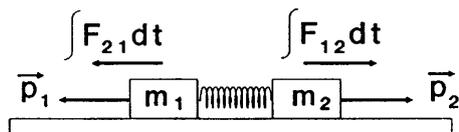


Kraftstoß und Impulsänderung:

$$\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt}$$

$$\int \vec{F}dt = \int d\vec{p} = \Delta\vec{p}$$

Kraftstoß = Impulsänderung



LMU LUDWIG-MAXIMILIANS-UNIVERSITÄT MÜNCHEN 5.3 Impulserhaltungssatz (\leftrightarrow actio = reactio)

t_0
 $\vec{v}_1(t_0) = 0$ m_1 m_2 $\vec{v}_2(t_0) = 0$

t_E
 $\vec{v}_1(t_E)$ m_1 m_2 $\vec{v}_2(t_E)$

R. Girwitz 9

LMU LUDWIG-MAXIMILIANS-UNIVERSITÄT MÜNCHEN 5.3 Impulserhaltungssatz (\leftrightarrow actio = reactio)

Theorie:

R. Girwitz 10

LMU LUDWIG-MAXIMILIANS-UNIVERSITÄT MÜNCHEN 5.3 Impulserhaltungssatz (\leftrightarrow actio = reactio)

Allgemein:

$$\vec{F}_a = 0 \Rightarrow \frac{d\vec{p}}{dt} = 0 \quad \text{oder:} \quad \vec{p} = \text{const.}$$

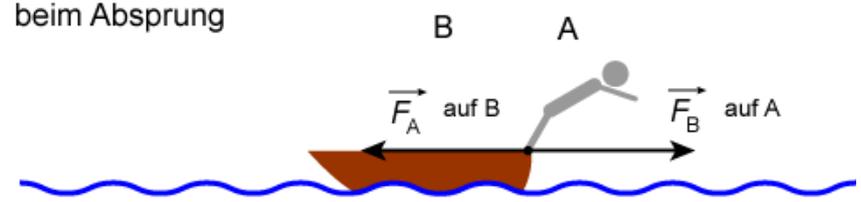
Impulssatz:

Ohne Einwirkung äußerer Kräfte bleibt in einem System die Summe aller Impulse konstant.

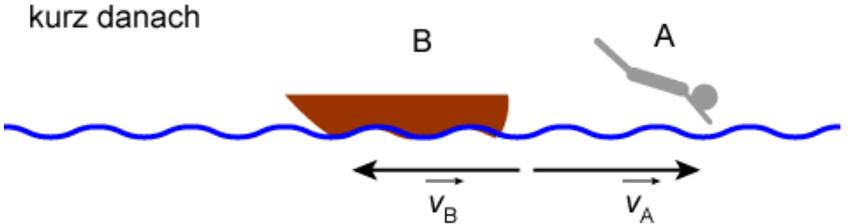
R. Girwidz 11

LMU LUDWIG-MAXIMILIANS-UNIVERSITÄT MÜNCHEN 5.3 Impulserhaltungssatz (\leftrightarrow actio = reactio)

beim Absprung



kurz danach



R. Girwidz 12

LMU LUDWIG-MAXIMILIANS-UNIVERSITÄT MÜNCHEN 5.3 Impulserhaltungssatz (\leftrightarrow actio = reactio)

R. Girwiz 13

LMU LUDWIG-MAXIMILIANS-UNIVERSITÄT MÜNCHEN 5.4 Stoßprozesse

Stoßart		Charakteristik $E_{kin,nach} - E_{kin,vor} = \Delta Q$
elastisch		Summe der kinetischen Energie vor und nach dem Stoß gleich $\Delta Q = 0$
inelastisch		Summe der kinetischen Energie nach dem Stoß kleiner $\Delta Q < 0$
unelastisch		Die Körper bewegen sich nach dem Stoß zusammen mit gleicher Geschwindigkeit $\Delta Q < 0$
überelastisch		$\Delta Q > 0$

R. Girwiz 14



Experimente zum geraden unelastischen Stoß

Spezialfall: $v_1' = v_2' = v'$

a) $m_2 = m_1 \Rightarrow$

b) $m_1 = 2 \cdot m_2 \Rightarrow$



a) **Unelastische Stöße**
(Körper haften nach dem Stoß aneinander, d. h. $v_1' = v_2' = v'$)

Impulssatz:

Energiesatz:

LMU LUDWIG-MAXIMILIANS-UNIVERSITÄT MÜNCHEN 5.4 Stoßprozesse (eindim. /kollineare Stöße)

a) **Unelastische Stöße**
 (Körper haften nach dem Stoß aneinander, d. h. $v_1' = v_2' = u'$)

Impulssatz: $m_1 \cdot v_1 + m_2 \cdot v_2 = (m_1 + m_2) \cdot v'$

Energiesatz: $\frac{1}{2} m_1 \cdot v_1^2 + \frac{1}{2} m_2 \cdot v_2^2 = \frac{1}{2} (m_1 + m_2) \cdot v'^2 + \Delta Q$

Sei speziell $v_2=0$ (ruhesendes Target):

$\Rightarrow v' = \frac{m_1}{m_1 + m_2} v_1$

→ Inelastisch Stoß auf Fahrbahn:
 Geschwindigkeiten messen

R. Girwidz 17

LMU LUDWIG-MAXIMILIANS-UNIVERSITÄT MÜNCHEN 5.4 Stoßprozesse (eindim. /kollineare Stöße)

Beispiel: Zusammenstoß LKW - PKW

$m_1 = 15 \text{ t}; v_1 = 100 \text{ km/h}$
 $m_2 = 1,5 \text{ t}; v_2 = -100 \text{ km/h}$

Frontaler Zusammenstoß, vollkommen inelastisch:

>

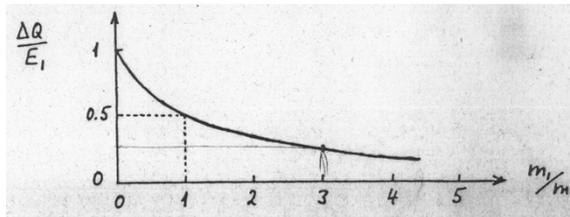
R. Girwidz 18



Energieabgabe beim unelastischen Stoß:



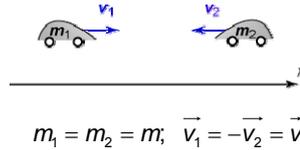
Relative Energieabgabe:





Relative Energieabgabe:

Weiterer spezieller Fall:



B) Elastische Stöße

I) Impulssatz: $m_1 \cdot \vec{v}_1 + m_2 \cdot \vec{v}_2 = m_1 \cdot \vec{v}_1' + m_2 \cdot \vec{v}_2'$

II) Energiesatz: $\frac{1}{2} m_1 \cdot v_1^2 + \frac{1}{2} m_2 \cdot v_2^2 = \frac{1}{2} m_1 \cdot v_1'^2 + \frac{1}{2} m_2 \cdot v_2'^2$

**B) Elastischer Stoß - Spezialfall: $v_2 = 0$ (ruhendes Target)****B) Elastischer Stoß - Spezialfall: $v_2 = 0$ (ruhendes Target)**

$$v_1' = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} \cdot v_1$$

$$v_2' = \frac{2m_1}{m_1 + m_2} \cdot v_1$$

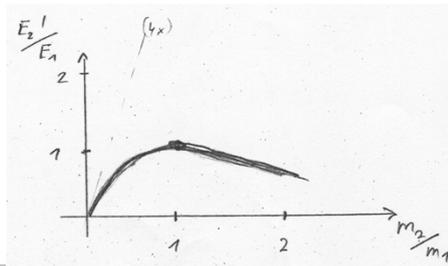
$m_1 = m_2$; $v_2 = 0$; (gleiche Massen)



Relativer Energieübertrag: $\frac{E_2'}{E_1}$

$$E_2' = \frac{1}{2} m_2 \cdot v_2'^2 = \frac{m_2}{2} \cdot \left(\frac{2m_1 \cdot v_1}{m_1 + m_2} \right)^2; \quad E_1 = \frac{1}{2} m_1 \cdot v_1^2$$

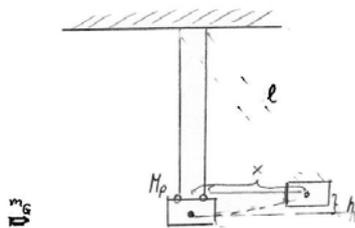
$$\frac{E_2'}{E_1} = \frac{4m_1 m_2}{(m_1 + m_2)^2} = \frac{4 \frac{m_2}{m_1}}{\left(1 + \frac{m_2}{m_1}\right)^2}$$



Max. bei $m_1 = m_2$



Messung von Geschwindigkeiten mit dem ballistischen Pendel



$M_P = 646\text{g}; \quad M_G = 0,49\text{g}; \quad l = 1\text{m};$

LMU LUDWIG-MAXIMILIANS-UNIVERSITÄT MÜNCHEN 5.5 Raketenphysik

t

Brennstoff (Δm)

m

v

t + Δt

Δm

m

$v - w$

$v + \Delta v$

$= v + w \frac{\Delta m}{m}$

R. Girwidz 27

LMU LUDWIG-MAXIMILIANS-UNIVERSITÄT MÜNCHEN 5.5 Raketenphysik

Prinzip: Antrieb durch Rückstoß der ausströmenden Gase; Impulserhaltung für Gesamtsystem (Rakete + ausströmenden Gas)

$\vec{v}(t)$

$m(t)$

$v - w$

s

$|\vec{w}| = w$: Ausströmgeschw. der Gase relativ zur Rakete

$v(t)$: Geschwindigkeit der Rakete im raumfesten System

$v_G(t) = v(t) - w$ Momentangeschwindigkeit

m_R : Masse Rakete;
 m_G : Masse der ausgestoßenen Gase;

R. Girwidz 28

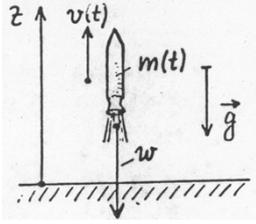
LMU LUDWIG-MAXIMILIANS-UNIVERSITÄT MÜNCHEN 5.5 Raketenphysik

Aufstellen der Bewegungsgleichung für den kräftefreien Raum

R. Girwidz 29

LMU LUDWIG-MAXIMILIANS-UNIVERSITÄT MÜNCHEN 5.5 Raketenphysik

Rakete im Schwerfeld (Raketenstart)



(äußeres Kraftfeld: $\vec{F}_G = m\vec{g}$ kommt hinzu)

R. Girwidz 30



Integration der Bewegungsgleichung:



Diskussion:

a) Bedingung für Abheben:

$$\frac{dv}{dt} > 0 \Leftrightarrow F_s > |F_G|$$

entscheidende Parameter für Schubkraft: $|w|$ und $\frac{dm}{dt}$;

$|w|$ hängt von Brennkammerdruck und -temperatur
sowie vom verwendeten Gasgemisch ab;

In der Praxis:

fl. H_2 – fl. O_2 → hohes $|w|$ ($\sim 4,5 \frac{km}{s}$), aber kleines $\frac{dm}{dt}$

Kerosin - fl. O_2 → kleines $|w|$ ($\sim 2,5 \frac{km}{s}$), aber höheres $\frac{dm}{dt}$



Diskussion:

b) Endgeschwindigkeit v_E (d.h. Geschwindigkeit bei Brennschluss $t = t_E$)

$$v_E = w \cdot \ln \frac{m_0}{m_E} - g \cdot t_E \quad \text{mit } m_E = m(t = t_E) \quad \text{Masse der leergebrannten Rakete bei Brennschluss}$$

entscheidende Parameter: $|w|$ und $\frac{m_0}{m_E}$

In der Praxis: $|w| = 2,5 \text{ bis } 4,5 \frac{\text{km}}{\text{s}}$ (siehe oben)

$$\frac{m_0}{m_E} \leq 6$$

$$\Rightarrow v_E \leq 8 \frac{\text{km}}{\text{s}}$$

zum Vergleich: Fluchtgeschwindigkeit $v_{\min} = 11,2 \text{ km/s}$ → Mehrstufenprinzip!



Daten der Saturn V (Apollo-Projekt)

$$m_0 = 2950\text{t}; \quad m_{\text{Treibstoff}} = 2000\text{t}; \quad \frac{m_0}{m_E} = \frac{2900}{700} \approx 4;$$

1. Stufe: Kerosin + fl. O_2

$$|w| = 2,2 \frac{\text{km}}{\text{s}}; \quad \frac{dm}{dt} = 15 \frac{\text{t}}{\text{s}}; \quad F_s = 3,3 \cdot 10^7 \text{N};$$

Brenndauer: $t_E \approx 2 \text{ min}$

2., 3. Stufe: fl. H_2 + fl. O_2



Endgeschwindigkeit v_E

- nach 1. Stufe ----- 2 km/s
- nach 2. Stufe ----- 6,8 km/s
- nach 3. Stufe ----- 7,85 km/s

Umlaufbahn in 185 km Höhe

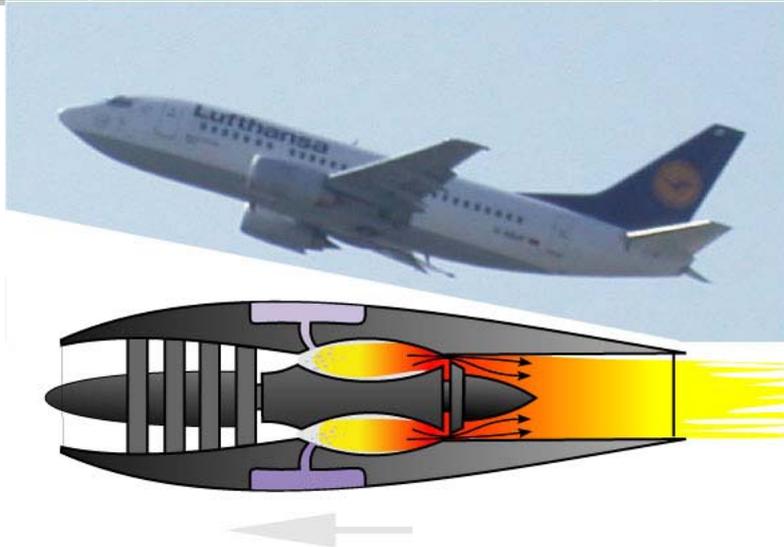
Beschleunigung der Rakete:

a) am Anfang (kurz nach Start):

$$a_A = \frac{F_s - m_0 \cdot g}{m_0} \approx 2 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \approx 0,2 \cdot g;$$

b) am Ende (kurz vor Brennschluss):

$$a_E = \frac{F_s - m_E \cdot g}{m_E} \approx 40 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \approx 4 \cdot g;$$



Die heißen Verbrennungsgase strömen aus den Brennkammern nach hinten aus.

LMU LUDWIG-MAXIMILIANS-UNIVERSITÄT MÜNCHEN 5.6 Stöße - zweidimensional

vor dem Stoß

nach dem Stoß

\vec{v}_1

\vec{v}_1'

\vec{v}_2'

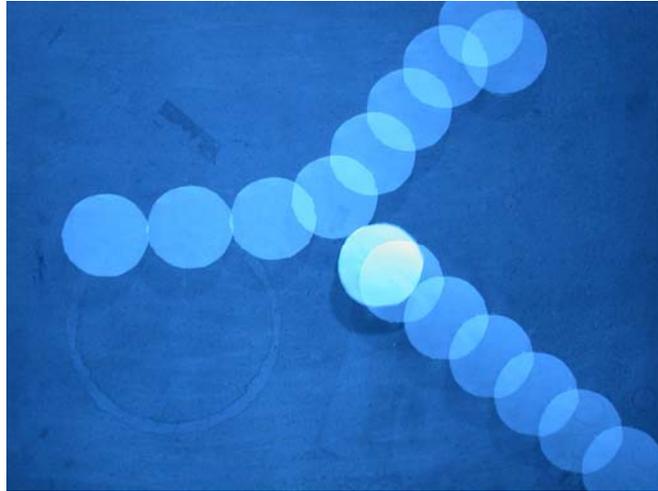
\vec{v}_1

R. Girwidz 37

LMU LUDWIG-MAXIMILIANS-UNIVERSITÄT MÜNCHEN 5.6 Stöße - zweidimensional

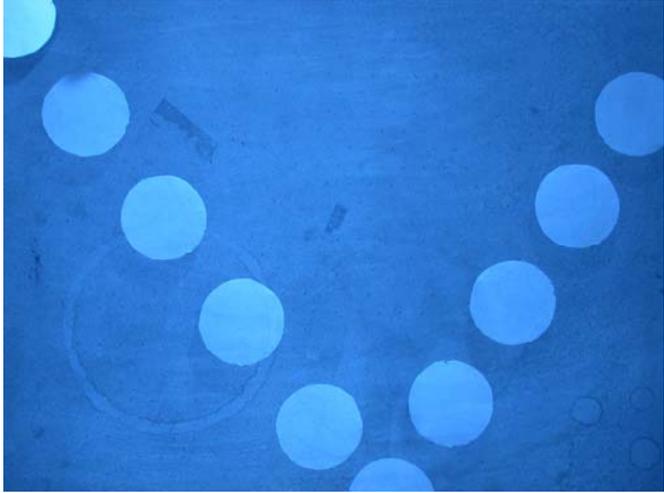
Stoßart		Charakteristik
gerade		Geschwindigkeitsvektoren liegen auf einer Geraden
schief		Geschwindigkeitsvektoren liegen in einer Ebene und schließen einen Winkel ein
zentral		Die Schwerpunkte liegen auf der Stoßnormalen (Senkrechte zur Stoßebene)
exzentrisch		Die Schwerpunkte liegen nicht auf der Stoßnormalen => Rotation

R. Girwidz 38



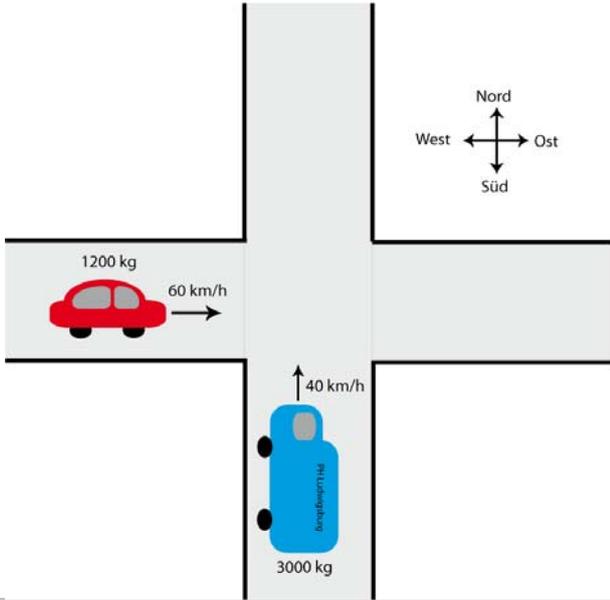
Bei gleichen Massen stehen die Geschwindigkeitsvektoren nach dem Stoß senkrecht aufeinander.

LMU LUDWIG-MAXIMILIANS-UNIVERSITÄT MÜNCHEN 5.6 Stöße - zweidimensional



R. Girwidz 41

LMU LUDWIG-MAXIMILIANS-UNIVERSITÄT MÜNCHEN 5.6 Stöße - zweidimensional



Nord
West ← → Ost
Süd

1200 kg
60 km/h

40 km/h

3000 kg

R. Girwidz 42